

# Comunicaciones digitales en banda base

Margarita Cabrera  
Francesc Tarrés Ruiz

Revisión a cargo de  
Francesc Rey Micolau  
Francesc Tarrés Ruiz

PID\_00184999



Los textos e imágenes publicados en esta obra están sujetos –excepto que se indique lo contrario– a una licencia de Reconocimiento-NoComercial-SinObraDerivada (BY-NC-ND) v.3.0 España de Creative Commons. Podéis copiarlos, distribuirlos y transmitirlos públicamente siempre que citéis el autor y la fuente (FUOC. Fundació para la Universitat Oberta de Catalunya), no hagáis de ellos un uso comercial y ni obra derivada. La licencia completa se puede consultar en <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/3.0/es/legalcode.es>

# Índice

<b>Introducción</b> .....	5
<b>Objetivos</b> .....	7
<b>1. La modulación digital en banda base. Aspectos esenciales</b> .....	9
<b>2. Aplicaciones de modulaciones digitales en banda base</b> .....	13
2.1. Modulación NRZ y modulación RZ .....	14
2.2. Modulación NRZI .....	15
2.3. Modulación Bipolar (AMI) .....	16
2.4. Modulación <i>M</i> -polar .....	21
2.5. Modulaciones <i>M</i> -unipolares .....	23
<b>3. Modulaciones de pulsos de amplitud (PAM)</b> .....	25
3.1. Modulador digital PAM .....	25
3.2. Parámetros de configuración de las modulaciones PAM .....	28
3.3. Energía media de las modulaciones M-PAM .....	30
3.4. Demodulador M-PAM .....	31
<b>4. Probabilidad de error</b> .....	36
4.1. Condiciones de cálculo de la probabilidad de error .....	36
4.2. Probabilidad de error para una modulación 2-PAM polar .....	38
4.3. Probabilidad de error para una modulación 2-PAM unipolar .....	40
4.4. Probabilidad de error para una modulación M-PAM polar .....	41
<b>5. Ocupación espectral de las modulaciones de pulsos</b> .....	45
5.1. Densidad espectral con pulsos rectangulares .....	46
5.2. Modulaciones PAM con pulsos <i>sinc</i> .....	47
5.3. Pulsos de raíz de coseno realzado .....	49
<b>6. Interferencia intersimbólica</b> .....	53
6.1. Interferencia intersimbólica ISI .....	53
6.2. Diagrama de ojo .....	57
<b>Resumen</b> .....	60
<b>Ejercicios de autoevaluación</b> .....	63
<b>Fórmulas matemáticas</b> .....	66
<b>Bibliografía</b> .....	67



## Introducción

En éste módulo se estudian los fundamentos de las comunicaciones digitales en banda base mientras que en el módulo siguiente se analizarán los sistemas digitales paso banda. Es importante distinguir entre estos dos tipos de sistemas de transmisión de datos. Los sistemas en banda base suelen utilizarse en aplicaciones donde la distancia de la transmisión es corta y la señal está bien protegida, normalmente mediante cables.

La esencia de los sistemas en banda base es que cada bit o símbolo lógico condiciona la forma de onda de la señal que transmitimos mediante una regla bien definida. El espectro de esta señal está centrado en la baja frecuencia y su ancho de banda depende de la velocidad a la que se transmiten los bits, aumentando cuando aumenta la tasa de bits. El carácter de baja frecuencia de la señal condiciona que este mecanismo de transmisión se degrade de forma considerable al aumentar la distancia y que sólo se utilice en sistemas de corta distancia. Los ejemplos más típicos serían las conexiones serie RS-232 o los USB (*universal serial bus*). Cuando se desea transmitir la señal digital a través de un canal radio o a distancias más grandes es recomendable utilizar frecuencias más elevadas para las cuáles pueden encontrarse antenas con dimensiones físicas realizables. Hablamos en estos casos de modulaciones digitales paso banda. Una de las ventajas de las modulaciones paso banda es que nos permiten que varios canales puedan compartir el mismo medio sin que se produzcan interferencias. Los sistemas de comunicación digital paso banda suelen partir de una señal digital paso bajo que modulan mediante algún mecanismo de traslación de frecuencia para optimizar su transmisión al medio.

En otros módulos hemos estudiado diferentes sistemas de modulación paso banda para el caso de señales analógicas. En concreto, los sistemas de modulación de amplitud (AM), modulación de frecuencia (FM), Banda Lateral Vestigial (VSL), etc., son sistemas en los que la señal de banda base (normalmente voz o audio) se traslada en frecuencia, alrededor de una frecuencia portadora, para facilitar su transmisión al medio y permitir la multiplexación de varias fuentes de señal. La señal de voz o audio sin modular, en banda base, tal y como la captura un micrófono y su correspondiente amplificador sólo puede ser enviada a distancias cortas, generalmente mediante el uso de cables.

En comunicaciones digitales la idea general es la misma. Los bits se representan mediante niveles de tensión o formas de onda simples, bien especificadas, construyendo una señal de banda base (baja frecuencia) que soporta la información de la fuente de datos digital. Esta señal puede ser transmitida a distancias cortas mediante cables pero si deseamos optimizar su transmisión a grandes distancias será preciso modularla y trasladarla en frecuencia. El receptor paso banda deberá ser capaz de recomponer la forma de onda de la señal banda base.

Así pues, para diseñar un sistema de transmisión de datos digitales debe tenerse en cuenta tanto la construcción de la señal en banda base (que analizamos en este módulo) cómo las técnicas de modulación paso banda que acondicionan su transmisión a grandes distancias en función del medio (que se analizarán en el próximo módulo). Veremos que muchas de las herramientas de análisis que se presentan en ambos tipos de sistemas son comunes por lo que los conceptos presentados en éste módulo resultan cruciales para comprender los principios de funcionamiento de cualquier sistema de comunicaciones digital.

El módulo se estructura del siguiente modo:

- 1) En el apartado 1 se presentan los aspectos esenciales de este módulo.
- 2) El apartado 2 se dedica a la definición de las modulaciones digitales más simples y que son utilizadas por diferentes sistemas de corta distancia.
- 3) En el apartado 3 se define una modulación digital en banda base genérica, denominada *modulación de pulsos por amplitud* o PAM. En este apartado se describen los parámetros más determinantes que se utilizan posteriormente para evaluar la calidad de un sistema de comunicaciones digitales y se presenta también la estructura de un demodulador de señales PAM.
- 4) En el siguiente apartado, se estudia la calidad de los sistemas de comunicaciones digitales mediante la figura de la probabilidad de error donde se tienen en cuenta condiciones de transmisión no ideales debido a la presencia de ruido. Este apartado es, sin duda, el de mayor importancia del módulo, ya que es básico saber caracterizar el comportamiento de las modulaciones digitales en general a partir de la probabilidad de error.
- 5) En el apartado 5 se consideran condiciones de transmisión no ideales, lo que lleva a estudiar, especialmente, el ancho de banda que ocupan las modulaciones de tipo PAM.
- 6) Finalmente, el último apartado se dedica a estudiar los efectos de una transmisión en condiciones no ideales sobre la señal transmitida.

#### Notación

En las secuencias o señales discretas, la variable independiente es un número natural y se representa entre corchetes  $[n]$  mientras, que en las señales continuas o analógicas, la variable independiente tiempo es real y se representa entre paréntesis  $(t)$ .

#### Ved también

Las técnicas de modelado paso banda se estudian en el módulo "Comunicaciones digitales paso banda" de esta asignatura.

## Objetivos

Los principales objetivos de aprendizaje de este módulo pueden resumirse en los siguientes conceptos y técnicas de análisis:

- 1.** Caracterizar los principales elementos que intervienen en una modulación paso bajo basada en la transmisión de una secuencia de pulsos.
- 2.** Identificar los principales parámetros que caracterizan una modulación digital como la velocidad de bit o tasa de transmisión, diferenciar entre símbolo y bit, energía media transmitida por bit y ancho de banda.
- 3.** Distinguir entre modulación polar y unipolar y entre modulación binaria y modulación multinivel.
- 4.** Diseñar el demodulador digital basado en el filtro adaptado al pulso transmitido y diseño de los umbrales de detección de símbolos.
- 5.** Analizar la probabilidad de error como medida de calidad de los sistemas de modulaciones digitales y estudio detallado para el caso particular de canales gaussianos. Analizar la relación entre dicha probabilidad de error y la energía media transmitida por bit.
- 6.** Estudiar los efectos producidos por la distorsión del canal, enfatizando este punto en la interferencia intersimbólica y sus repercusiones en la degradación de la probabilidad de error.
- 7.** Estudiar los pulsos limitados en banda basados en el pulso raíz coseno realzado.



## 1. La modulación digital en banda base. Aspectos esenciales

Desde el punto de vista funcional, un **modulador digital** se identifica con un bloque que realiza una transformación de señales y que puede representarse de forma simplificada como se muestra en la figura 1. La señal de entrada es discreta, de valores binarios y en este módulo se le denomina  $b[n]$ . Su velocidad se mide mediante la velocidad de bit,  $r_b$ , que viene dada en bits por segundo. La señal de salida  $s(t)$  es una forma de onda continua en el tiempo y transporta de algún modo la información binaria de la secuencia de bits.

Dentro del esquema general de un sistema de comunicaciones, el **modulador digital** es el subsistema encargado de construir la forma de onda de una señal en función de los bits que se deseen representar.

Esto es, a la entrada del mismo se halla presente una secuencia de bits que deben transmitirse a una determinada velocidad de bit y a la salida se tiene la señal modulada digitalmente, es decir, una forma de onda física que representa la información digital. La secuencia de bits es un conjunto de 0 y 1 ordenados y procedentes de un dispositivo de almacenamiento digital. La señal modulada digitalmente se representa mediante una función continua en tiempo y en general se manifiesta mediante una tensión eléctrica. Coloquialmente, puede decirse que la entrada al sistema modulador digital se procesa “por software” y la salida se procesa “por hardware”.

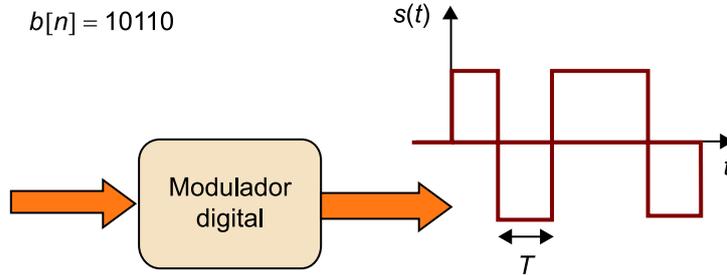
Dicho más formalmente, el modulador digital es la interfaz que realiza el mapeo de la información digital (secuencia de bits) y las formas de onda continuas o analógicas que se adaptan a las características del canal. El mapeo en general se realiza tomando conjuntos de  $b$  bits, y asociando a cada uno de estos conjuntos una señal de energía finita que se transmite en tiempo real.

La señal modulada resultante ha de adoptar la forma más adecuada para poder ser transmitida por el canal. Es importante determinar el ancho de banda que ocupa y sus características espectrales para saber cómo puede verse afectada esta señal por el canal.

Observad en el ejemplo representado en la figura 1 de transmisión de una secuencia de 5 bits, que la amplitud positiva de la señal modulada se corresponde con el bit 1 y la amplitud negativa de la señal modulada se corresponde con el bit 0. En frecuencia, el ancho de banda que ocupa esta señal se relaciona

con la velocidad binaria de la secuencia de entrada y se clasifica como una modulación digital en banda base. Su contenido frecuencial está centrado alrededor de la frecuencia cero.

Figura 1. Modulador Digital



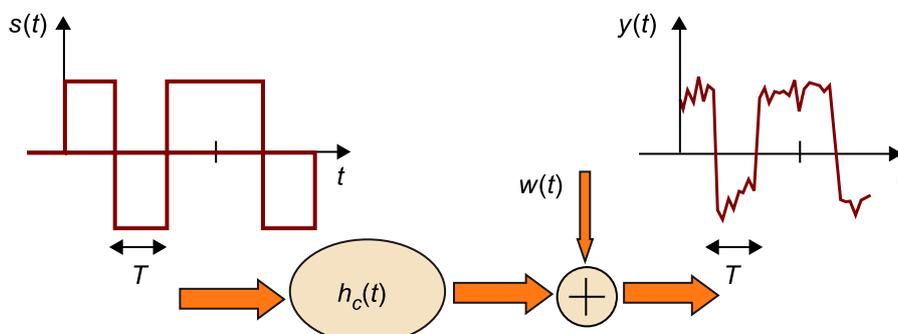
La función base que soporta la información digital en la señal de salida de la figura 1 es un pulso rectangular. En este ejemplo, el bit determina la amplitud de dicho pulso y la forma temporal del pulso en particular es:

$$p(t) = \Pi\left(\frac{t}{T}\right) \quad (1)$$

En esta expresión,  $T$  es el margen de tiempo dedicado a la transmisión de cada bit. Así, si por ejemplo la secuencia de bits ha de transmitirse a una velocidad de 1 Mbps, se debe transmitir un millón de bits en cada segundo. De lo anterior, resulta que el tiempo que se dedica a la transmisión de cada bit es igual a 1 microsegundo ( $\mu\text{s}$ ). Más adelante se formalizan ambos parámetros: velocidad de bit, también denominada *velocidad de transmisión*, y *tiempo de bit*.

Una vez generada la señal modulada, si ésta corresponde a una transmisión en banda base y no requiere un traslado a una banda superior, la señal consistente en una secuencia de pulsos se envía directamente al canal de transmisión, que en este módulo se modela como un canal invariante y de ruido aditivo blanco gaussiano. Este mismo modelo se utiliza también en el módulo de señales paso banda y queda simplificado de forma gráfica en la figura 2.

Figura 2. Modelo de canal invariante y de ruido aditivo blanco y gaussiano



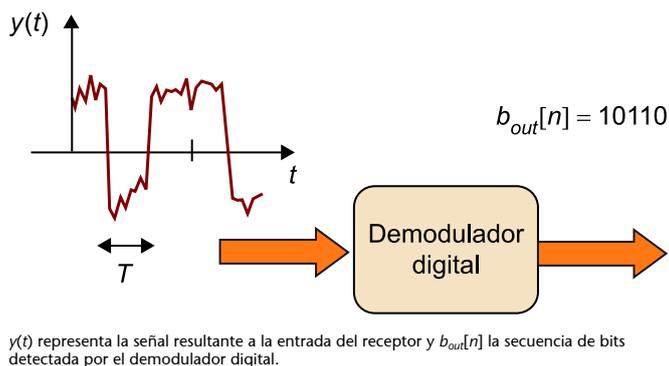
$s(t)$  representa la señal modulada digitalmente,  $h_c(t)$  la respuesta impulsional del canal,  $w(t)$  el ruido del canal y  $y(t)$  la señal resultante a la entrada del receptor.

Observad cómo la señal que realmente se obtiene en el extremo receptor es una versión degradada de la señal original. La degradación se debe en parte al filtrado realizado por el canal por la convolución con  $h(t)$  y el ruido que se suma al resultado. Desde un punto de vista matemático la señal en la entrada del receptor puede escribirse de la manera siguiente:

$$y(t) = h_c(t) * s(t) + w(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau)h(t - \tau)d\tau + w(t) \quad (2)$$

Aparte del modulador y el canal de transmisión, el tercer elemento clave en la cadena del sistema de transmisión es el demodulador digital que se encarga de realizar las operaciones inversas al modulador digital. Es decir, a partir de la señal recibida se debe generar, a la salida del demodulador digital, la secuencia de bits que coincida de la mejor forma posible con la secuencia de bits que se haya transmitido. Formalmente, se dice que el demodulador digital ha de detectar los bits recibidos con un mínimo de errores respecto a los bits transmitidos.

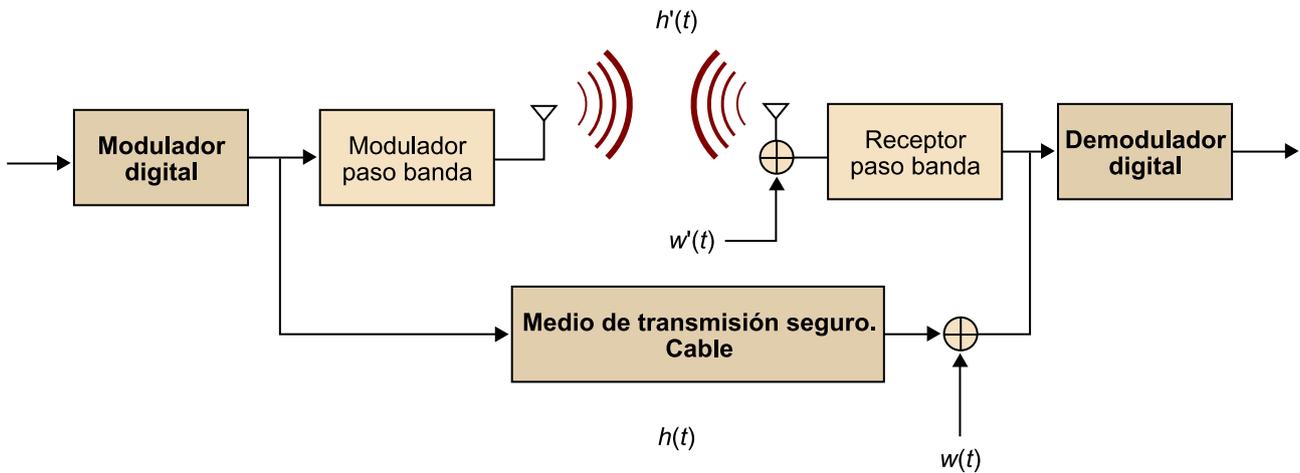
Figura 3. Demodulador digital



Comparando la secuencia de bits de entrada de la figura 1 con la secuencia de bits de salida de la figura 3, se observa que para este ejemplo en particular no se ha producido ningún error en la transmisión de los 5 bits representados.

Resulta interesante comparar desde el punto de vista gráfico los sistemas de modulación digital en banda base con los sistemas de modulación digital paso banda. La figura 4 muestra la integración entre los dos subsistemas indicando en **negrita** los bloques que se estudiarán en este módulo. Es muy importante insistir en que la viabilidad de usar un tipo u otro de sistema de comunicaciones depende de la aplicación.

Figura 4. Representación esquemática de la integración entre los sistemas de comunicaciones en banda base y los sistemas paso banda



En negrita se señalan los bloques correspondientes a un sistema en banda base y que son analizados con detalle en este módulo.

Los sistemas de banda base sólo pueden usarse para distancias cortas en las que existe poca degeneración de la señal banda base. Largas distancias supone siempre la necesidad de introducir algún tipo de modulación de la información. Observad también que aunque en el gráfico aparece representado un sistema de transmisión sin hilos en la práctica pueden utilizarse sistemas guiados. La esencia de un sistema paso banda es la presencia de una modulación que traslada de la señal a transmitir a regiones del espectro con mejores características de propagación.

En definitiva, en el sistema de comunicaciones genérico que se estudia en este módulo, analizamos las características de señales en los tres elementos principales del sistema de comunicaciones: el modulador, el canal y el demodulador.

En concreto, para los diferentes tipos de formas de onda o modulaciones y diferentes modos de asignar las amplitudes a cada uno, se analiza:

- La probabilidad de que los bits se detecten con errores en el demodulador (apartado 4).
- El ancho de banda que ocupan las señales (apartado 5).
- La repercusión que tiene sobre la calidad del sistema la respuesta impulsional del canal en el caso de que éste sea no ideal y genere distorsión sobre la señal transmitida (apartado 6).

## 2. Aplicaciones de modulaciones digitales en banda base

Los sistemas de comunicaciones en los que se transmiten directamente modulaciones digitales en banda base suelen denominarse *codificadores de línea*.

Los codificadores de línea transmiten la señal modulada digitalmente a baja frecuencia, sin realizar un traslado en frecuencia a una banda específica del espectro.

En general, los codificadores de línea se utilizan para interconectar directamente equipos de comunicaciones entre sí o para interconectar sistemas próximos que realizan aplicaciones de tratamiento digital de señal. La forma de la señal modulada,  $s(t)$ , representa directamente la tensión que está presente en los cables que comunican los equipos.

En general, siempre interesa transmitir señales que no tengan componente continua, especialmente si el recorrido por el cable es largo. El principal motivo por el que se intenta reducir la presencia de componente continua es la mejora en la propagación de la señal aunque también es importante tener en cuenta que la existencia de componente continua dificulta la recuperación de sincronismos. Las señales constantes se propagan de forma deficiente a través de un cable. Además, si la tensión varía de acuerdo con un cierto patrón de forma constante es más fácil mantener el reloj del receptor sincronizado con el del transmisor.

La sincronización entre el transmisor y el receptor es fundamental para determinar el inicio y final de cada bit así como la duración de los mismos. Si la señal que se recibe es constante, el receptor no dispone de suficiente información para recuperar con precisión la cadencia de transmisión de la información en el extremo receptor.

En este apartado se presentan los formatos de modulación más comunes en los sistemas de transmisión que utilizan codificadores de línea relacionándolos en algún caso con estándares de comunicación ampliamente conocidos.

### Reflexión

El cable físico es lo que en este apartado modelamos como la respuesta impulsional del canal de comunicaciones de la figura 2.

## 2.1. Modulación NRZ y modulación RZ

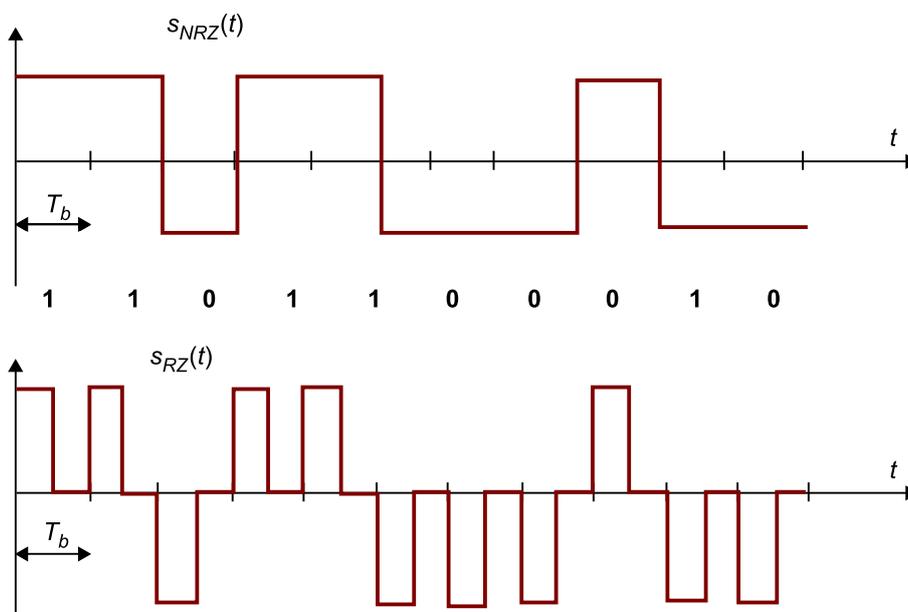
Las modulaciones de línea NRZ (*non-return zero*) y RZ (*return zero*) son consideradas como las modulaciones más elementales para la transmisión de la información en banda base.

La **modulación NRZ** consiste simplemente en la idea intuitiva de asignar un nivel de tensión positivo cuando el bit que desea transmitirse es un 1 y un nivel de tensión negativo cuando deseamos transmitir un 0. El nombre de *non-return zero* se debe a que la señal permanece estable durante todo el tiempo de transmisión del bit.

La alternativa directa a NRZ es la **modulación RZ**, donde también se utiliza una tensión positiva para indicar la presencia de un 1 y una tensión negativa para la presencia de un cero. En este caso, no obstante, una vez se ha transmitido la información la señal retorna al valor de tensión cero antes de que se produzca el siguiente bit.

Teniendo en cuenta las definiciones anteriores vemos que cuando en una secuencia de bits aparecen varios unos o ceros consecutivos la señal NRZ se mantiene constante, no retornando a cero mientras que la señal RZ siempre tiene variaciones, retornando al valor cero después de la transmisión de cada bit. En la Figura 5 se muestran las formas de onda asociadas a cada una de las modulaciones de línea para una secuencia binaria determinada.

Figura 5. Formas de las señales moduladas en función del tiempo



Arriba: NRZ; abajo: RZ.

Al comparar los dos formatos de transmisión vemos que NRZ puede tener una componente continua significativa, sobre todo cuando se producen varios valores de unos o ceros consecutivos en la secuencia binaria. Por otra parte, RZ

nos proporciona la garantía de que la señal siempre tiene cambios constantes, independientemente de los valores de los bits de la secuencia binaria. Esto constituye una ventaja importante para garantizar una correcta detección de los sincronismos, ya que el receptor sabe que en cada bit se produce un retorno a cero. No obstante, el ancho de banda de la señal RZ es más grande que el de la señal NRZ como lo indica la mayor actividad en los cambios de tensión. Este aumento del ancho de banda no siempre es adecuado ya que las propias características del cable pueden limitar la máxima tasa de bits que puede transmitirse.

El formato de señal NRZ se utiliza en el estándar RS-232, que es un protocolo que determina cómo intercambiar datos binarios en serie entre diferentes dispositivos o placas que procesan digitalmente la señal. Aunque se usa en varias aplicaciones, la más popular es tal vez el puerto serie de muchos ordenadores, especialmente en aplicaciones industriales.

Los ejemplos NRZ y RZ, tal cual se han presentado, son de tipo polar, debido a que las amplitudes de los pulsos son de ambas polaridades, positiva y negativa. Existen también las versiones RZ y NRZ unipolar, y en tal caso, cuando se transmite el bit 1, se presenta polaridad positiva y, cuando se transmite el bit 0, se presenta polaridad nula y la señal vale 0 volts. Las correspondientes representaciones gráficas coinciden con las del caso polar de la figura 5, salvo en que las señales irían de 0 a un valor positivo.

### **Polaridad**

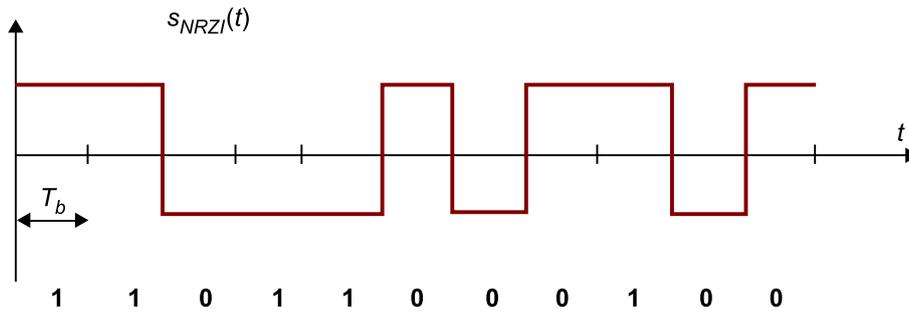
Al mencionar la polaridad de una señal, se debe interpretar como el signo positivo o negativo de la tensión eléctrica mediante la cual se manifiesta dicha señal.

## **2.2. Modulación NRZI**

NRZI significa *NRZ invertido*<sup>1</sup>. Para este formato de modulación, también binaria, la amplitud del pulso dedicado a la transmisión de cada bit coincide con la amplitud del pulso que se ha transmitido anteriormente si el bit actual es un 1, y cambia de polaridad respecto al pulso anterior cuando el bit actual es un 0. Es decir, cuando se produce un 0 cambia la polaridad de la señal y cuando se transmite un 1, la polaridad se mantiene igual. En la figura 6 se representa esquemáticamente este tipo de código de línea donde puede observarse que los cambios de polaridad se producen cuando se tiene que transmitir un bit igual a cero.

<sup>(1)</sup>En inglés, *non-return zero inversion*.

Figura 6. Ejemplo NRZI binaria



Forma de onda de la señal modulada para una determinada secuencia de bits.

Este tipo de modulación es el utilizado en los puertos de ordenador del estándar USB<sup>2</sup>, cuyos conectores hoy en día se han popularizado para interconectar distintos tipos de periféricos al ordenador o incluso para realizar la alimentación y carga de baterías de los equipos. Los conectores USB aparecen actualmente en la práctica totalidad de dispositivos y terminales: teléfonos, agendas electrónicas, dispositivos de memoria, cámaras fotográficas, teclados, ratón, sistemas de alimentación, etc. Su popularidad es tal que prácticamente han desaparecido otro tipo de puertos como los PS/2 (para conectar teclados y ratones), los puertos serie tipo RS-232 o los puertos paralelos (que se usaban principalmente para impresoras y dispositivos que requerían un gran ancho de banda)

<sup>(2)</sup>USB es la sigla de la expresión inglesa *universal serial bus*.

En este tipo de señalización, a partir de las transiciones provocadas por los 0, se facilita la obtención del sincronismo de la señal. Es decir, en la recepción, a partir de estas transiciones se ajusta el inicio de cada símbolo. Si llegan muchos 1 seguidos, este sincronismo se puede perder. Para evitar que ello ocurra en la señalización del estándar USB, se realiza lo que se denomina *bit stuffing*, consistente en añadir un 0 tras una ráfaga de seis 1 consecutivos, independientemente del valor del bit posterior. Mediante esta técnica, se ralentiza la transmisión de la señal; sin embargo, se ahorra que se tenga que transmitir una señal diferente para la obtención del sincronismo de la modulación.

Las especificaciones de USB más rápidas son para el USB 3.0, que es compatible con versiones anteriores y alcanza velocidades de 1,5 Mbps, 12 Mbps, 480 Mbps (USB 2.0) y hasta 5 Gbps (USB 3.0).

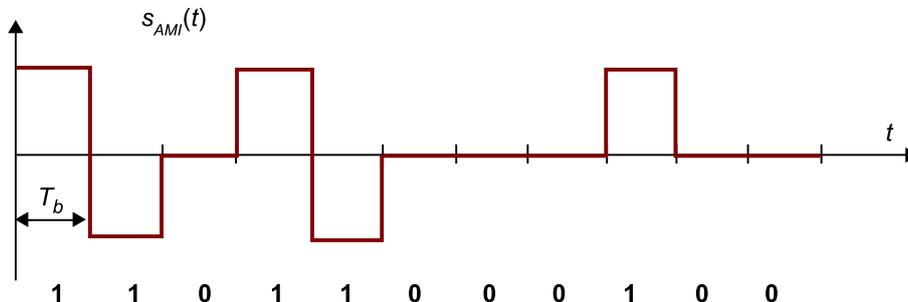
### 2.3. Modulación Bipolar (AMI)

La modulación bipolar se denomina también AMI<sup>3</sup> o inversión de marca alternada) y consiste en asignar 0 volts al bit 0 y polaridad positiva y negativa de forma alternada cuando se transmite un bit 1.

<sup>(3)</sup>AMI es la sigla de la expresión inglesa *alternate mark inversion*.

En la figura 7 se puede observar cómo la señal es nula en los tramos en los que se transmite un bit 0 y cuando se transmite un bit 1 es positiva si había sido negativa al transmitir el último bit 1 y viceversa.

Figura 7. Ejemplo bipolar o AMI. Forma de onda de la señal modulada en función del tiempo para una determinada secuencia de bits



La modulación bipolar reduce la componente continua de la señal ya que alterna constantemente el signo de la señal transmitida. De esta forma, podemos garantizar que no tenemos componente continua, lo que facilita la transferencia de la señal a través del medio. Sin embargo, esta estrategia de modulación no garantiza ningún tiempo máximo para que se produzcan cambios de polaridad por lo que el sincronismo del sistema puede ser difícil de conseguir en algunos casos. En efecto, si la secuencia de bits tiene un número de 0 muy largo la señal de línea siempre estará a cero voltios, y será complejo mantener el reloj del receptor.

Existen diferentes variantes de la modulación bipolar que intentarán garantizar que siempre se producen cambios de polaridad dentro de un tiempo límite. Una de estas variantes es el formato HDB3 utilizado en la red Red Digital de Servicios Integrados (RDSI<sup>4</sup>) para interconectar o multiplexar diferentes señales binarias entre sí. Éste es el caso de cuando a través de un cable telefónico se transmiten simultáneamente diferentes señales y permite ofrecer diferentes servicios a través de la red como por ejemplo videoconferencias.

<sup>(4)</sup>RDSI es la sigla de la expresión *red digital de servicios integrados*.

#### Ved también

En el ejemplo 2 (subapartado 2.5) se consideraran con cierto detalle algunas modulaciones alternativas a la modulación AMI, que pueden considerarse como generalizaciones de esta.

### Ejercicio 1. Diferentes tipos y variantes de codificadores de línea

En este ejercicio se pretende profundizar sobre algunas variantes de modulaciones de línea. En concreto se consideran las modulaciones:

- Biphasé (también denominada Biphasé Mark Code - BMC)
- Manchester
- Manchester diferencial
- HDB3
- 8b10b

Para cada una de ellas se pide:

- Describir brevemente como se construye la señal de línea a partir de una secuencia de bits genérica.
- ¿Que ventajas/inconvenientes tiene cada una de ellas? Citar aplicaciones donde se use cada una de las modulaciones anteriores.
- Determinar una señal de línea correspondiente a la siguiente secuencia de bits: 1101010000000011.

d) Calcular la energía media por bit de cada modulación suponiendo que los niveles de tensión que utilizamos son de  $\pm 5$  volts y que queremos transmitir una secuencia de bits equiprobable a una velocidad de 10 Mbps. (Nota: Para el caso de HDB3 o 8b10b suponer que la probabilidad de que se produzcan secuencias de 4 o más bits iguales es muy baja y que por lo tanto la energía puede aproximarse por la de una modulación AMI convencional).

### Solución

a) Para cada caso considerado, la señal de línea se construye de la siguiente manera:

- **Biphase Mark Code:** Al inicio de cada bit se produce un cambio de nivel. Si se trata de un cero se mantiene el nivel durante todo el periodo pero si se trata de un 1 se modifica en el centro del periodo de tiempo asociado a ése bit.
- **Manchester:** La forma de onda asignada al 1 es un pulso de duración  $T$  que empieza en un nivel positivo y a la mitad del periodo cambia a negativo. La forma de onda asociada al 0 también tiene una duración  $T$  pero empieza en nivel negativo y a la mitad del periodo cambia a positivo.
- **Manchester diferencial:** Si el bit actual es 1 se mantiene el nivel del bit anterior y se cambia de nivel a la mitad del periodo de símbolo. Si el bit es 0 se cambia el nivel del bit anterior y se vuelve a cambiar a mitad del periodo de símbolo.
- **HDB3:** El código HDB3 se utiliza para evitar el problema de que aparezca un número elevado de ceros consecutivos, lo que dificultaría la sincronización de la señal recibida y consiste en la utilización del pulso rectangular NRZ y la siguiente ley de codificación de símbolos:
  - Cada bit 1 se codifica con polaridad invertida al último pulso no nulo transmitido.
  - Los bits 0 se codifican con amplitud nula siempre que no excedan de tres bits 0 seguidos.
  - A partir del primer bit transmitido se realiza un recuento de polaridad del pasado. Si el número de pulsos positivos coincide con el número de pulsos negativos, la polaridad es nula. Si un grupo de ellos excede al otro en un pulso, la polaridad del pasado es positiva o negativa.

Cuando llegan 4 bits 0000 seguidos al codificador, el último bit, en lugar de codificarse mediante cuatro amplitudes nulas como en el caso de AMI, se codifica mediante un bit de violación de polaridad, igual polaridad al último pulso transmitido, y se denomina  $V$ , pero siempre sin llegar a que la polaridad positiva o negativa exceda en más de un pulso, por lo que cuando sea conveniente también el primero de estos cuatro bits se codifica con polaridad no nula (B) pero sin violar la polaridad (puede encontrarse una descripción más detallada y con una tabla de ejemplo en el problema 3 de los ejercicios propuestos en el libro de texto).

- **8b/10b.** Se trata de un código de línea cuyo objetivo es codificar la secuencia de bits de entrada en una nueva secuencia en la que el número total de ceros y unos esté equilibrado. El código final tiene la propiedad de que si se toma una secuencia de 20 bits el número de unos y el número de ceros no difieren en más de 2 bits. Además, es posible garantizar que nunca aparecen más de 5 unos o ceros consecutivos. Estas propiedades garantizan que la señal mantiene siempre una frecuencia de cambios mínima que facilita la recuperación del reloj en el receptor y que limita la potencia de la señal en la componente continua. El código originalmente fue patentado por IBM aunque su uso fue reducido en la industria. Una vez IBM decidió liberar la patente del código se utilizan en un gran número de aplicaciones prácticas.

La codificación funciona esencialmente a través de tablas. Cada 8 bits se convierte a 10 bits. Por tanto, de las 256 posibles palabras se seleccionan las 1.024 que nos proporcionan mejores propiedades en cuanto a equilibrio y compensación de ceros y unos. Para realizar la codificación la palabra de 8 bits se divide en dos partes, una de 5 bits y otra de 3 bits. Además se genera una variable de estado denominada *running disparity* que siempre se inicializa al valor  $-1$ . La asignación del código se realiza consultando tablas que proporcionan el valor final en función del grupo de bits y del valor de *running disparity*. El valor de *running disparity* cambia de  $-1$  a  $+1$  y viceversa siempre que la palabra final resultante tiene un número de ceros y unos no compensado (2 valores más de un valor que del otro). Si el número de ceros y uno de la palabra de 10 bits es igual el valor de *running*

*disparity* se mantiene. Las tablas de codificación pueden encontrarse en diferentes fuentes. En las siguientes tablas se proporcionan los resultados que pueden encontrarse en la wikipedia.org.

Tabla 1

**3b/4b**

3b/4b code				3b/4b code			
Input	RD = -1	RD = +1		Input	RD = -1	RD = +1	
	HGF	fg hj			HGF	fg hj	
D.x.0	000	1011	0100	K.x.0	000	1011	0100
D.x.1	001	1001		K.x.1 ‡	001	0110	1001
D.x.2	010	0101		K.x.2 ‡	010	1010	0101
D.x.3	011	1100	0011	K.x.3	011	1100	0011
D.x.4	100	1101	0010	K.x.4	100	1101	0010
D.x.5	101	1010		K.x.5 ‡	101	0101	1010
D.x.6	110	0110		K.x.6 ‡	110	1001	0110
D.x.P7 †	111	1110	0001				
D.x.A7 †	111	0111	1000	K.x.7 † ‡	111	0111	1000

**5b/6b**

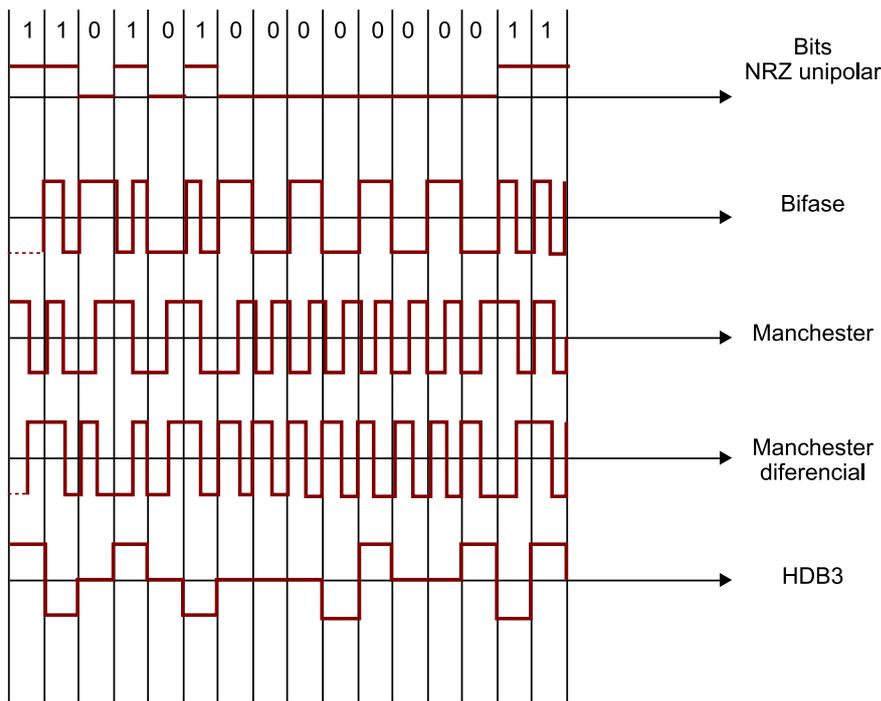
5b/6b code				5b/6b code			
Input	RD = -1	RD = +1		Input	RD = -1	RD = +1	
	EDCBA	abcdei			EDCBA	abcdei	
D.00	00000	100111	011000	D.16	10000	011011	100100
D.01	00001	011101	100010	D.17	10001	100011	
D.02	00010	101101	010010	D.18	10010	010011	
D.03	00011	110001		D.19	10011	110010	
D.04	00100	110101	001010	D.20	10100	001011	
D.05	00101	101001		D.21	10101	101010	
D.06	00110	011001		D.22	10110	011010	
D.07	00111	111000	000111	D.23 †	10111	111010	000101
D.08	01000	111001	000110	D.24	11000	110011	001100
D.09	01001	100101		D.25	11001	100110	
D.10	01010	010101		D.26	11010	010110	
D.11	01011	110100		D.27 †	11011	110110	001001
D.12	01100	001101		D.28	11100	001110	
D.13	01101	101100		D.29 †	11101	101110	010001
D.14	01110	011100		D.30 †	11110	011110	100001
D.15	01111	010111	101000	D.31	11111	101011	010100
				K.28	11100	001111	110000

Adaptada de wikipedia.org

b) En todos los casos se trata de estrategias que intentan facilitar la recuperación de sincronismos, imponiendo que siempre aparezcan transiciones aunque la secuencia de datos original tenga muchos '1s' o '0s' consecutivos. Bifase, Manchester y Manchester diferencial tienen formas de onda que varían muy rápidamente (tal y cómo puede verse en el siguiente apartado). En cambio, HDB3 tiene un menor número de cambios y por lo tanto un ancho de banda más optimizado. Sus usos principales son:

- Bifase: Estándares de transmisión de audio digital AES/EBU (AES3) y SPDIF
- Manchester: Ethernet
- Manchester diferencial: IEEE 802.5 (redes de área local en Token Ring)
- HDB3. Red digital de servicios integrados. Multiplexación de varias señales
- 8b/10b: PCI Express, IEEE 1294b, USB 3.0, DVI, HDMI, Display Port, Serial ATA.

c) En la figura siguiente se proporcionan las formas de onda de cada una de las modulaciones de línea para la secuencia de bits establecida en el enunciado. No se ha representado la modulación 8b/10b ya que al aumentar el número de bits los ejes temporales de los bits no coincidirán con el resto de modulaciones. El resultado de la codificación 8b/10b se discute. Algunas de las soluciones no son únicas ya que dependen de las condiciones iniciales en las que se encontraba el sistema. Por otra parte, alguna de las modulaciones pueden tener definiciones ligeramente distintas en función del texto consultado. La valoración del ejercicio tendrá en cuenta estas posibles variaciones entre las respuestas y la coherencia del resultado con lo expuesto en el primer apartado.



En la codificación 8b/10b la secuencia se descompone en bloques de 8 bits. Para cada uno de los cuáles se obtiene una palabra de 10 bits que se codificará en NRZ. Así pues, nuestra secuencia 11010100 00000011 se descompone en dos partes. A su vez, cada una de las partes se divide en los 5 bits de más peso y los 3 de menor peso. A los primeros se les asignará un fragmento de 6 bits y al segundo uno de 4 utilizando las tablas proporcionadas en el apartado anterior y teniendo en cuenta el estado del *running disparity* que suponemos que originalmente tiene el valor -1. De acuerdo con esto:

$$11010 = D.26 \rightarrow 010110$$

$$100 = D_x.4 \rightarrow 1101$$

Por lo tanto 11010100 se convierte en 0101101101 y el *running disparity* se actualiza a +1.

Teniendo en cuenta este resultado, el segundo paquete de 8 bits se codificará:

$$00000 = D.00 \rightarrow 011000$$

$$011 = D_x.3 \rightarrow 0011$$

Por lo que la secuencia final de 10 bits asociada al segundo byte será 0110000011

**d)** En los tres primeros casos, la energía del 0 y del 1 son  $A^2T$ , por lo que el promedio es  $A^2T$ . Para justificar éste resultado es necesario ver que para calcular la energía de un bit determinado es necesario coger la forma de onda de la señal, elevarla al cuadrado e integrar. Las señales que tenemos tienen una amplitud  $A$  o  $-A$  durante el periodo de bit, por lo que al elevarlas al cuadrado su amplitud será  $A^2$ . Al integrar  $A^2$  durante un periodo de tiempo  $T$  obtenemos el resultado  $A^2T$ .

$$E_{bifase, Manchester} = A^2T$$

El caso del 8b/10b es parecido al anterior debido a la codificación de la señal es NRZ por lo que la energía de cada bit es idéntica e igual a la amplitud a cuadrado multiplicada por la duración del bit. No obstante, ahora debemos tener en cuenta que la duración del bit deberá ser menor debido a que se ha realizado la conversión de 8 a 10 bits. El nuevo periodo de bit vendrá dado por  $T = 8T/10$ .

En el caso AMI (HDB3 bajo la hipótesis de que la probabilidad de que se produzcan 4 ceros consecutivos es muy baja) tenemos que la probabilidad de que el bit sea cero será de 0,5 (un 50 % de los casos). La energía asociada al bit 0 es nula ya que la señal tiene un nivel de amplitud zero. Por otra parte, la probabilidad de que el

nivel tome el valor  $+A$  o  $-A$  será de  $0,25$  en cada uno de los casos. En este caso, el nivel de amplitud de la señal es  $A$ , por lo que la energía será  $A^2T$ . La energía promedio total será por tanto:

$$E_{AMI\ media} = 0,5 \times 0 + 0,25 \times A^2T + 0,25 \times A^2T = 0,5A^2T$$

## 2.4. Modulación $M$ -polar

La modulación  $M$ -polar es la modulación que presenta  $M$  niveles o amplitudes diferentes para una misma señal. En los ejemplos anteriores pueden verse modulaciones que son binarias, porque a cada bit se le asigna solamente un nivel.

En la modulación  $M$ -polar se modulan los bits tomándolos por grupos. A cada grupo de bits se le asigna un nivel diferente. A continuación, se presenta un ejemplo que debe considerarse como un caso particular que posteriormente generalizaremos a un número de niveles cualquiera.

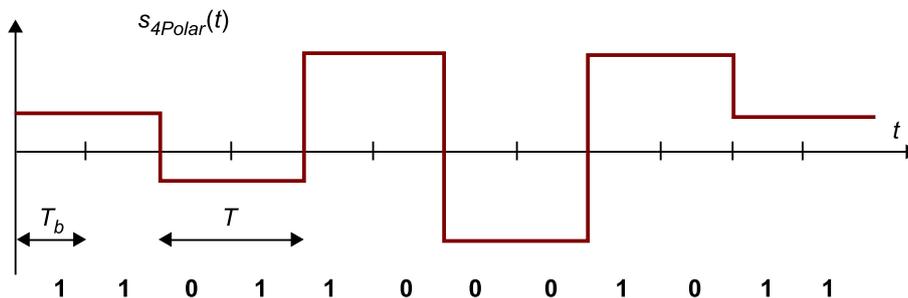
Para el caso de modulación polar de 4 niveles (4-polar), se tiene que para cada dos bits de la secuencia binaria se asigna una amplitud diferente a los pulsos, y por tanto cada pulso dura dos bits. El tiempo de símbolo ( $T$ ) es el doble del tiempo de bit ( $T_b$ ). Notad que para modulaciones binarias ambos tiempos coinciden. En el caso de la modulación polar de 4 niveles, se toman las cuatro amplitudes equiespaciadas o de igual diferencia de amplitud entre cada dos niveles consecutivos, según se muestra en la tabla 1. Obsérvese que entre cualesquiera 2 códigos consecutivos las diferencias de tensiones son de una amplitud igual a  $A$ . Esto implica que el código 01 y el código 11 tomen los valores  $-A/2$  y  $A/2$  respectivamente. También es importante observar cómo han sido ordenados los códigos. Entre dos códigos consecutivos solo se produce el cambio de un bit, es decir, el código 01 tiene detrás el código 11 por lo que sólo cambia el primer bit entre estas dos palabras. Análogamente, el código 11 tiene como siguiente amplitud al código 10. Esta estrategia de codificación permite que entre dos niveles de tensión consecutivos sólo se produzca el cambio de un bit. Esta propiedad es muy importante ya que la mayor parte de sistemas prácticos están contruidos de acuerdo con esta regla: "Dos niveles de tensión adyacentes sólo difieren en un bit". Los códigos que cumplen esta propiedad se denominan códigos de Gray.

Tabla 2. Codificación polar de 4 niveles (4-polar)

Bits	Amplitud (volts)
10	$+3A/2$
11	$+A/2$
01	$-A/2$
00	$-3A/2$

En la figura 8 se muestra la señal temporal obtenida mediante la codificación 4-polar definida por la tabla 2 para una secuencia de bits determinada. Es interesante observar la duración de cada uno de los símbolos y compararlos con la duración de los bits. En este caso concreto, cada dos bits constituyen un único símbolo. Esta estrategia de codificación permite que el ancho de banda de la señal que nos representa la secuencia de bits sea menor de lo esperado. En efecto, desde un punto de vista puramente intuitivo, ahora cada valor de amplitud nos representa dos bits. Esto significa que la cadencia de cambios para representar una secuencia binaria es relativamente más baja que cuando cada bit era representado por un único valor de amplitud.

Figura 8. Representación esquemática de una modulación 4-polar tomando como referencia la tabla 2 para la asignación de niveles de cuantificación a cada par de bits



Para generalizar el ejemplo anterior a otro número de niveles, se va aumentando el número de bits de cada grupo que da lugar a una amplitud. Si los bits se toman en grupos de 3, se obtienen  $M = 8$  posibles amplitudes y se asignan cuatro valores positivos y cuatro valores negativos para que el efecto sea una modulación de tipo polar a la que se denomina 8-polar. En general, el número de niveles posibles es una potencia de 2, ya que así resulta directo asignar a cada uno de los niveles una palabra con un número de bits fijo. Si los grupos se toman de 4 bits, se tienen 16 combinaciones diferentes y daría lugar a la modulación 16-polar, y así sucesivamente.

Generalmente, para cada uno de los niveles debe asignarse una palabra de  $k$ -bits, que puede ser arbitrariamente elegida entre las  $2^k$  posibles palabras. La relación entre la palabra y el nivel de amplitud se conoce con el nombre de *tabla de asignación*. La tabla de asignación puede ser arbitraria siempre que tanto el transmisor como el receptor conozcan su definición. Generalmente, es conveniente elegir tablas de asignación basadas en códigos de Gray, de forma que las palabras asociadas a dos niveles adyacentes solo difieran en un bit.

En el ejemplo 1 se muestra una tabla de asignación de Gray para una modulación 8-polar. Este tipo de modulación en banda base es comúnmente utilizada en modulaciones paso banda, en las que tanto la componente en fase como la componente en cuadratura se corresponden a una modulación de pulsos, y en función de los diferentes niveles posibles para cada pulso se tienen diferentes formatos de modulaciones paso banda.

#### Ved también

La modulación 8-polar se analiza con detalle en el módulo "Comunicaciones digitales paso banda" de esta asignatura.

### Ejemplo 1

Construcción de una tabla de asignación 8-polar basada en código de Gray. La tabla de asignación que se muestra a continuación tiene la propiedad de que la distancia entre dos niveles adyacentes es constante (y de valor igual a  $A$ ) y que las palabras binarias de 3 bits asignadas a niveles adyacentes solo difieren en un bit (Código de Gray). Obsérvese por ejemplo que entre los niveles asociados a  $3A/2$  y  $5A/2$ , situados a una distancia  $A$ , solo se produce el cambio el segundo bit de la palabra código (de 001 a 011).

Tabla 3. Tabla de asignación de niveles de una modulación 8-polar utilizando un código de tipo Gray

Código	Nivel
010	$7A/2$
011	$5A/2$
001	$3A/2$
000	$A/2$
100	$-A/2$
101	$-3A/2$
111	$-5A/2$
110	$-7A/2$

## 2.5. Modulaciones $M$ -unipolares

Las modulaciones  $M$ -polares que hemos considerado hasta tienen niveles de amplitud simétricos, situados alrededor del valor de tensión cero. También es posible definir las versiones unipolares, donde todos los valores de tensión de cada nivel tienen el mismo signo (generalmente el positivo). En el ejemplo 2 se muestra una modulación con estas características.

### Ejemplo 2

En este ejemplo se muestra una tabla de asignación correspondiente a un código unipolar de 8 niveles (8-unipolar) cuyos niveles están separados una distancia constante  $A$  y que las palabras código solo difieren en un bit para niveles consecutivos:

Tabla 4. Tabla de asignación de niveles de una modulación 8-unipolar utilizando un código de tipo Gray

Código	Nivel
010	$7A$
011	$6A$
001	$5A$
000	$4A$
100	$3A$
101	$2A$
111	$A$

---

<b>Código</b>	<b>Nivel</b>
110	0

---

### 3. Modulaciones de pulsos de amplitud (PAM)

En el apartado anterior se han introducido algunos ejemplos y casos particulares de modulaciones de pulsos por amplitud o PAM<sup>5</sup>. En este apartado vamos a intentar presentar los mismos conceptos pero mediante un estudio generalizado a un número de niveles cualquiera  $M$ , siendo  $M$  una potencia de 2.

<sup>(5)</sup>PAM es la sigla de la expresión inglesa *pulse amplitude modulation*.

En una modulación PAM, se transmite una secuencia de pulsos cuya amplitud se determina directamente a partir de la secuencia de bits. En el caso general de más de dos niveles, que se conoce con el nombre de *modulaciones multinivel*, cada grupo de  $b$  bits da lugar a una amplitud diferente según la tabla de asignación de niveles que hemos definido en los apartados anteriores.

Así, para formar una señal modulada se realizan dos operaciones de forma secuencial a partir de cada grupo de  $b$  bits:

- Obtención de la amplitud que se asigna al grupo de bits.
- Transmisión de un pulso con la amplitud obtenida.

En el siguiente subapartado se formalizan ambos conceptos mediante el modulador digital.

#### 3.1. Modulador digital PAM

Nos centramos en este subapartado en la asignación de los niveles o amplitudes a partir de la secuencia de bits y de su estadística.

Si los bits se agrupan de  $b$  en  $b$ , el número de niveles necesarios para dar cabida a todas las posibles combinaciones de amplitudes o niveles es de:

$$M = 2^b \text{ niveles} \quad (3)$$

Al nivel  $m$ -ésimo le corresponde la amplitud:  $a_m$ ;  $m = 1, \dots, M$ . A partir de la secuencia de bits de entrada  $b[n]$  se forma una nueva secuencia de amplitudes o símbolos  $a[k]$ , según una tabla de asignación de niveles.

La secuencia de bits es de naturaleza aleatoria, por lo que también lo es la secuencia de símbolos. Cada bit de entrada al sistema es una variable aleatoria igual a 0 o a 1 con una determinada probabilidad. Se dice que la secuencia de bits se caracteriza por la probabilidad que tiene cada bit de ser 0 ó 1. La situación más frecuente consiste en que los valores tengan la misma probabilidad. Se dice en este caso que los bits son equiprobables. Si además los símbolos se

#### Amplitudes, símbolos o niveles

Hablaremos indistintamente de amplitudes, símbolos o niveles.

Lo más formal es hablar de una secuencia de símbolos para referirnos a los diferentes niveles que se van asignando a la secuencia de bits.

codifican sin efecto memoria, es decir, cada símbolo depende únicamente de los  $b$  bits correspondientes independientemente de los símbolos codificados con anterioridad, entonces los símbolos también se producen con la misma probabilidad (símbolos equiprobables).

### Equiprobabilidad

Una secuencia de bits es equiprobable si cada bit es igual a 1 con probabilidad 0,5 y es igual a 0 con probabilidad 0,5. En definitiva, cada bit tiene la misma probabilidad de ser igual a 0 o igual a 1.

Una secuencia de símbolos es equiprobable si cada valor posible se produce con igual probabilidad y se dice que cada símbolo es una variable aleatoria discreta y uniforme.

$$P\{a[k] = a_m\} = \frac{1}{M} \quad (4)$$

En la definición anterior, es importante interpretar la fórmula (4).  $a[k]$  representa la secuencia temporal de símbolos que procede de codificar los bits. El índice  $k$  es por tanto temporal. El símbolo que se transmite en el tiempo  $k$  es uno cualquiera de los  $M$  disponibles en el conjunto de símbolos totales. El índice  $m$  indica el orden de cada símbolo de todos los disponibles.

La forma coloquial de expresar la fórmula (4) es, por tanto: “En el tiempo  $k$ , se puede transmitir cualquier símbolo de los  $M$  disponibles. Los  $M$  símbolos disponibles presentan idéntica probabilidad de ser transmitidos en el tiempo  $k$ . Dicha probabilidad es igual a  $1/M$ .”

### Ejemplo 3. Codificación de símbolo

En la tabla 5 se presenta como ejemplo una tabla de asignación de niveles para PAM 4-polar o directamente 4-PAM polar. A continuación se reproduce dicha tabla. En la tabla 6 se representa un caso binario 2-PAM. En estas tablas se muestran las amplitudes o símbolos asignados en función del bit o bits que se tengan a la entrada del modulador digital.

Tabla 5

Bits	4-polar
	$a_m$
10	$+3A/2$
11	$+A/2$
01	$-A/2$
00	$-3A/2$

Tabla 6

Bits	2-polar	2-unipolar
	$a_m$	$a_m$
0	$-A/2$	0
1	$+A/2$	$+A$

Siguiendo con las operaciones que realiza el modulador digital a partir de la secuencia de amplitudes  $a[k]$ , se forma la señal modulada  $s(t)$ . Cada símbolo multiplicado por el correspondiente pulso da lugar a la señal modulada, cuya expresión general se formula como:

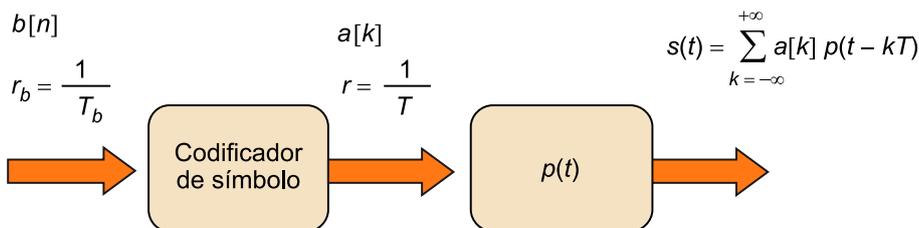
$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a[k] p(t - kT) \quad (5)$$

En (5),  $p(t)$  es el pulso o forma temporal que se escoge para la transmisión de cada símbolo y  $T$  representa el tiempo de símbolo, es decir, el tiempo que transcurre entre la transmisión de dos símbolos consecutivos.

En resumen, una modulación PAM queda determinada mediante dos factores: el tipo de codificación utilizado para la asignación de amplitudes o símbolos (polar, unipolar, binario, multinivel, etc.) y el pulso elegido para su conformación (NRZ, RZ, etc.). El modulador digital para PAM se desglosa por tanto en dos partes: el codificador de símbolo y el conformador de pulso.

Según la idea anterior, el esquema de la figura 1 que representa un modulador digital se desglosa en dos partes, tal como se muestra en la figura 9. En el primer bloque, la secuencia de bits  $b[n]$  se codifica para dar lugar a la secuencia de símbolos  $a[k]$ . En el segundo bloque, se genera un pulso  $p(t)$  cada  $T$  segundos de amplitud igual al correspondiente símbolo  $a[k]$ . El resto de los parámetros que aparecen en la figura se definen con detalle en el siguiente subapartado.

Figura 9. Etapas de un modulador digital: codificador de símbolo y conformador de pulsos



### 3.2. Parámetros de configuración de las modulaciones PAM

En cualquier esquema de modulador digital es importante definir los siguientes parámetros:

- **Velocidad de bit o tasa de transmisión:**  $r_b$ . Es el número de bits por segundo que se transmiten por el sistema de transmisión. Sus unidades son bits por segundo, o abreviado bps.
- **Tiempo de bit:**  $T_b = \frac{1}{r_b}$ . Es el tiempo transcurrido entre cada dos bits consecutivos a la entrada del modulador digital.
- **Velocidad de símbolo:**  $r = \frac{r_b}{b}$ . Es el número de símbolos por segundo que se transmiten por el sistema de transmisión. Dado que cada símbolo transporta  $b$  bits, la velocidad de símbolo viene dada por la velocidad de bit dividida por los bits asociados a cada símbolo, tal y como se indica en la definición anterior. A las unidades de este parámetro se les denomina *baudios*. Un baudio equivale a un símbolo por segundo.
- **Tiempo de símbolo:**  $T = \frac{1}{r} = bT_b$ . Es el tiempo transcurrido entre cada dos símbolos consecutivos a la entrada del conformador de pulso.
- **Energía media de símbolo:**  $E_s$  Es la energía media de la señal modulada  $s(t)$  que se transmite en el tiempo de un símbolo.  $E[.]$  representa el promedio o esperanza estadística.

$$E_s = E \left[ \int_0^T s^2(t) dt \right] \quad (6)$$

- **Energía media de bit:**  $E_b = \frac{E_s}{b}$ . Es la energía media de la señal modulada  $s(t)$  que se transmite por cada bit. Dado que cada símbolo transporta  $b$  bits, se relaciona con la energía media de símbolo según la expresión anterior.

Según lo anterior, la energía media de símbolo puede calcularse separando la energía propia de la forma de onda del pulso, que es una variable determinística de la componente estadística del nivel de amplitud correspondiente a la combinación binaria, que en este caso es una variable aleatoria. Teniendo en cuenta estos resultados obtenemos la siguiente descomposición:

$$E_s = E \left[ a_m^2 \right] \int_0^T p^2(t) dt = E \left[ a_m^2 \right] E_p \quad (7)$$

De la expresión (7) se deduce que la energía de la señal modulada PAM es igual al producto entre la media estadística del cuadrado de los símbolos,  $E[a_m^2]$ , y la energía del pulso,  $E_p$ .

Recordad, del estudio de variables aleatorias, que en general el valor de  $E[a_m^2]$  puede obtenerse como la varianza de la variable aleatoria  $\{a_m\}$  más la media de esta variable elevada al cuadrado. En el caso en que la media de la variable aleatoria fuera cero el resultado de esta componente de la energía coincide con la varianza de  $\{a_m\}$ . Resumiendo:

$$\begin{aligned} E[a_m^2] &= \sigma_a^2 + (E[a_m])^2 \\ E[a_m] &= \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M a_m = 0 \Rightarrow E[a_m^2] = \sigma_a^2 \end{aligned} \quad (8)$$

#### Ejemplo 4. Cálculo de energía media en modulación polar y pulsos rectangulares NRZ

En las modulaciones polares, los símbolos se codifican con igual número de niveles positivos que negativos. Consideraremos las modulaciones 2-polar del estándar RS-232 y la 4-polar, dibujadas en la figura 5 y en la figura 8 respectivamente. Para transmitir una secuencia de bits equiprobables a una tasa de transmisión de  $r_b = 20$  kbps, se calcula a continuación la energía media de bit para cada uno de los casos, suponiendo que la separación entre símbolos sea  $A = 5$  voltios.

#### Solución:

El promedio estadístico debe realizarse sobre las amplitudes de la señal modulada, ya que el pulso es una función determinista y se fija para todos los símbolos. Si se utiliza el pulso rectangular NRZ, se tiene que la energía del pulso es igual a:

$$p(t) = \Pi\left(\frac{t}{T}\right) \quad (9)$$

$$E_p = \int_{-\infty}^{+\infty} p^2(t) dt = \int_{-T/2}^{+T/2} \Pi\left(\frac{t}{T}\right) dt = T \quad (10)$$

donde hemos supuesto que la amplitud del pulso conformador es igual a la unidad y que su duración es  $T$  (igual a la duración de un símbolo).

La potencia de los símbolos para el caso 2-polar, suponiendo que los dos símbolos son equiprobables puede obtenerse como:

$$E[a_m^2] = \frac{1}{2} \left( \left( +\frac{A}{2} \right)^2 + \left( -\frac{A}{2} \right)^2 \right) = \frac{A^2}{4} \quad (11)$$

Y para el caso 4-polar, suponiendo también que los 4 valores son equiprobables se obtiene:

$$E[a_m^2] = \frac{1}{4} \left( \left( +\frac{3A}{2} \right)^2 + \left( +\frac{A}{2} \right)^2 + \left( -\frac{A}{2} \right)^2 + \left( -\frac{3A}{2} \right)^2 \right) = \frac{5A^2}{4} \quad (12)$$

Para el caso 2-polar tendremos que la duración de cada pulso será  $T = \frac{1}{20.000} = 50 \cdot 10^{-6}$  s. El valor de la energía será por tanto:

$$E_{s \ 2PAM} = E_{b \ 2PAM} = \frac{A^2}{4} T = \frac{25}{4 \cdot 20.000} = 0,312 \text{ mJ} \quad (13)$$

Análogamente, para el caso 4-polar la duración del pulso será el doble ( $T = 100 \cdot 10^{-6}$ ) ya que en cada símbolo se transmiten 2 bits. La energía por símbolo vendrá dada por:

$$E_{s\ 4PAM} = \frac{5A^2}{4} T = \frac{5 \cdot 25}{4 \cdot 10.000} = 3,125 \text{ mJul} \quad (14)$$

Como cada símbolo se corresponde a 2 bits, la energía por bit será la mitad que la energía por símbolo. Así pues:

$$E_{b\ 4PAM} = 1,6 \text{ mJul} \quad (15)$$

Si se comparan las energías de bit para los dos tipos de modulación, se concluye que, al mantener la distancia entre símbolos, ambas modulaciones van a tener el mismo grado de protección frente a errores producidos por el ruido; sin embargo, la modulación 2-polar requiere menor consumo de energía. Como contrapartida, necesita un mayor ancho de banda, ya que éste es proporcional a la velocidad de símbolo (20 kbaudios en el caso binario y 10 kbaudios en el caso multinivel).

### 3.3. Energía media de las modulaciones M-PAM

En el ejemplo 1 se obtienen expresiones para la energía media de bit  $E_b$  de las modulaciones PAM 2-polar y 4-polar en función del parámetro de separación entre niveles  $A$ , y del tiempo de bit  $T_b$ . Más adelante se muestra que la energía de bit  $E_b$  influye directamente en la probabilidad de error de los bits, de ahí que resulte interesante obtener una expresión general que nos relacione energía media de bit  $E_b$  de una modulación  $M$ -polar con el número de niveles de la modulación. Esta relación podrá utilizarse para realizar diversos tipos de análisis de la probabilidad de error.

En los siguientes párrafos se obtiene una expresión generalizada que relaciona la energía de bit de una modulación multinivel M-PAM con el número de bits que se transmiten en cada símbolo. Para ello, se realizan los siguientes supuestos:

- La modulación es polar, lo que significa que se utilizan tantos niveles negativos como positivos de forma simétrica alrededor del cero.
- Todos los niveles tienen la misma probabilidad (equiprobables)

Suponemos que la modulación tiene  $M$  niveles que se corresponden con una codificación de  $b$  bits por símbolo. De esta forma, obtenemos que:

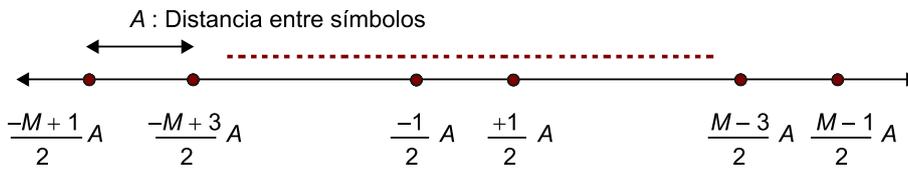
$$M = 2^b \quad (16)$$

Los  $M$  niveles están distribuidos simétricamente alrededor de la tensión cero y separados por una distancia  $A$ . La disposición de los niveles se muestra en la figura 10. Podemos obtener una fórmula general de la tensión que corresponde a cada nivel  $m$  a partir de la siguiente ecuación:

$$a_m = -\frac{M-1}{2} \cdot A + mA; \quad 1 \leq m \leq M \quad (17)$$

En esta ecuación, al dar valores a la variable  $m$ , iremos obteniendo todas las amplitudes de la modulación  $M$ -polar que se representan en la figura 10.

Figura 10. Representación gráfica de los niveles de tensión de una modulación  $M$ -polar



Se tiene un total de  $M$  niveles dispuestos simétricamente alrededor de la tensión 0 y separados todos ellos una distancia  $A$ .

Para determinar la energía por símbolo de la modulación podemos utilizar la fórmula general obtenida en el apartado anterior:

$$E_s = E[a_m^2]E_p = \frac{E_p}{M} \sum_{m=1}^M a_m^2 = \frac{E_p}{M} \sum_{m=1}^M \left(\frac{-M+1}{2} A + mA\right)^2 = \frac{M^2-1}{12} A^2 E_p \quad (18)$$

Para llegar a este resultado final es necesario desarrollar el cuadrado dentro del sumatorio y aplicar dos fórmulas genéricas de progresiones finitas. Las fórmulas que deberían aplicarse son:

$$\sum_{n=1}^N n = \frac{N(N+1)}{2} \quad \sum_{n=1}^N n^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6} \quad (19)$$

A partir de la energía media de símbolo, la energía media de bit queda expresada como:

$$E_b = \frac{E_s}{b} = \frac{M^2-1}{12b} A^2 E_p \quad \text{con} \quad M = 2^b \quad (20)$$

### 3.4. Demodulador M-PAM

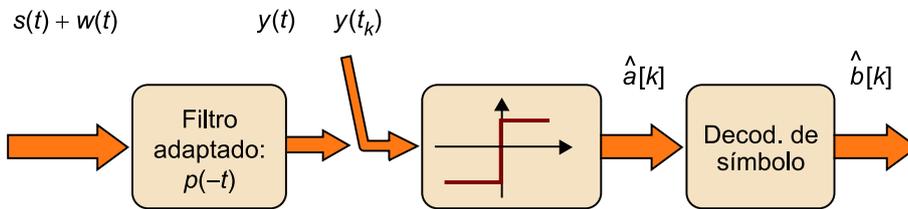
En este apartado realizaremos el estudio del demodulador M-PAM. El demodulador digital presentado en la figura 3 debe realizar para el caso de modulaciones M-PAM las operaciones inversas a las representadas en el modulador de la figura 9. Las funciones del demodulador se muestran en el diagrama de bloques de la figura 10 y son las siguientes:

- Filtro adaptado o FA: es un sistema lineal e invariante de respuesta impulsional  $p(-t)$  y se dice que está adaptado al pulso  $p(t)$ .
- Muestreo de la señal:  $y(t_k) = y(t)|_{t=t_k}$
- Estimación de la secuencia de símbolos a partir de las muestras obtenidas.

- Decodificación de los símbolos para dar lugar a la secuencia de bits decodificada.

En el resto del apartado se describe con detalle el efecto que estas operaciones tienen sobre la señal.

Figura 11. Etapas de un demodulador digital M-PAM



Filtro adaptado al pulso, muestreo, estimador de símbolo y decodificador de símbolo.

Para el análisis de la señal, se asume que el único efecto producido sobre la señal transmitida es la suma de ruido. La respuesta impulsional del canal representada en la figura 2 se considera ideal.

$$h_c(t) = \delta(t) \quad (21)$$

El modelo asumido para el ruido se describe en el módulo “Comunicaciones analógicas: modulaciones AM y FM”. El ruido de canal  $w(t)$  es un proceso aleatorio de media nula y de densidad espectral:

$$S_w(f) = \frac{N_0}{2} \quad (22)$$

En definitiva, se tiene un canal de tipo AWGN.

### Canal AWGN

El modelo de señal de ruido comúnmente asumido en los sistemas de comunicaciones consiste en un proceso aleatorio estacionario y blanco. Cada una de las muestras en tiempo de la señal de ruido se caracteriza como una variable aleatoria gaussiana. En estas condiciones, se habla de un canal de ruido aditivo blanco y gaussiano (AWGN). Los canales AWGN se clasifican en canales AWGN ideales y canales AWGN con distorsión. Los primeros corresponden al caso en el que la respuesta impulsional únicamente atenúa y/o retarda la señal ( $h_c(t) = \alpha\delta(t - t_d)$ ) y los segundos presentan una respuesta impulsional que no se puede modelar según la fórmula (22).

El filtro receptor adaptado al pulso transmitido es óptimo desde la perspectiva de maximizar las muestras de señal a su salida respecto al nivel de ruido. Aunque *a priori* podría prescindirse del mismo en aplicaciones en las que la transmisión es muy directa, y el ruido apenas deteriora la señal, se considera en

este apartado para facilitar más adelante el cálculo de la probabilidad de error en las mejores condiciones posibles. Se formula a continuación la respuesta impulsional del filtro y la forma obtenida para la señal resultante a la salida de dicho filtro.

Considerando la respuesta impulsional del filtro adaptado:

$$h_{FA}(t) = p(-t) \quad (23)$$

La respuesta al propio pulso se puede expresar en función de la función de autocorrelación del pulso.

$$p(t) * p(-t) = R_p(t) \quad (24)$$

La señal a la salida del filtro adaptado queda como la convolución entre la señal de entrada al filtro adaptado y la respuesta impulsional del filtro adaptado:

$$y(t) = (s(t) + w(t)) * p(-t) \quad (25)$$

Donde la señal PAM es igual a:

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a[k] p(t - kT) \quad (26)$$

Sustituyendo (26) y (24) en la expresión (25), se llega a:

$$y(t) = s(t) * p(-t) + w(t) * p(-t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a[k] R_p(t - kT) + n(t) \quad (27)$$

En la expresión (27), el primer sumando se refiere a la modulación de pulsos PAM y el segundo al término de ruido resultante a la salida del filtro adaptado. En la figura 12 se representa el efecto para el caso de que el pulso  $p(t)$  sea rectangular y NRZ. En el esquema superior de la figura, se puede observar la forma de la señal a la salida del filtro adaptado al pulso, cuando la entrada es el propio pulso. En el esquema inferior se representa que la señal a la entrada del filtro adaptado es una secuencia de cinco pulsos con amplitudes positivas o negativas según el correspondiente símbolo que se transmita:  $a[k]$ . La señal de salida se interpreta como la superposición o suma de la respuesta a cada uno de los pulsos individuales.

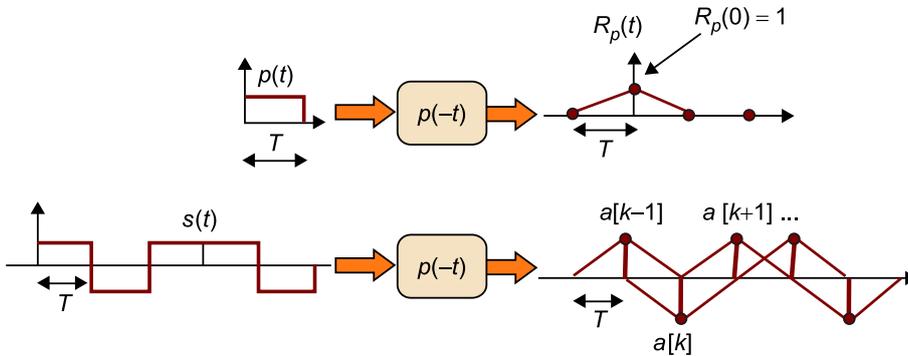
Cada una de las muestras de la señal de salida tomadas a razón de una por tiempo de símbolo se corresponde con uno de los símbolos transmitidos. A la salida del filtro adaptado, el pulso resultante se extiende en tiempo a lo largo de dos periodos de símbolo, de tal modo que, cuando se toma la muestra

#### El pulso $p(t)$

El pulso  $p(t)$  es una función de energía finita y, como tal, su función de autocorrelación coincide con la convolución de la fórmula (24).

correspondiente al símbolo  $a[k]$ , el nivel de señal no se ve afectado ni por el pulso anterior correspondiente al símbolo  $a[k-1]$ , ni por el pulso posterior correspondiente al símbolo  $a[k+1]$ .

Figura 12. Señales resultantes a la salida del filtro adaptado



La siguiente definición se facilita como recordatorio de señales deterministas de energía finita y para ayudar a caracterizar la influencia del pulso sobre las muestras de señal a la salida del filtro adaptado.

**Densidad espectral del pulso**

El pulso  $p(t)$  que soporta una modulación digital es una función determinista y de energía finita. Su función de autocorrelación es:

$$R_p(\tau) = p(\tau) * p(-\tau) = \int p(t+\tau)p(t)dt \quad (28)$$

Su función de densidad espectral de energía es:

$$S_p(f) = |P(f)|^2 \quad (29)$$

Y su energía es:

$$E_p = R_p(0) = \int S_p(f)df \quad (30)$$

Con el objetivo de simplificar la notación, y sin pérdida de generalidad, se considera a partir de este punto que el pulso original se halla normalizado para ser de energía igual a la unidad.

$$E_p = R_p(0) = \int p^2(t)dt = 1 \quad (31)$$

Si por ejemplo se considera el pulso rectangular NRZ para que cumpla la especificación de energía igual a la unidad dada en (31), se debe normalizar como:

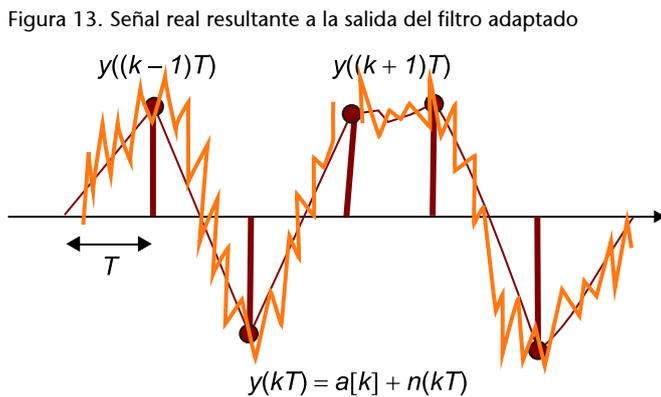
$$p(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \Pi\left(\frac{t}{T}\right) \quad (32)$$

De esta manera, el nivel de los símbolos a la salida del filtro adaptado coincide con los de la propia secuencia de símbolos a la entrada del modulador, y las muestras de la señal (27), tomadas al tiempo de símbolo  $T$ , son igual a:

$$y(kT) = \sum_{k'=-\infty}^{+\infty} a[k']R_p(kT - k'T) + n(kT) = a[k] + n[k] = y[k] \quad (33)$$

Cada una de las muestras obtenidas a la salida del filtro adaptado y especificadas en (33) coinciden con el símbolo que debe detectarse más una perturbación aleatoria provocada por el ruido del canal. En el apartado 3, las muestras de ruido se modelan y caracterizan estadísticamente para obtener la probabilidad de error del sistema.

En la figura 13 se representa la señal de salida de la figura 12 para el caso de cinco símbolos 2-PAM, habiendo sumado las formas de onda de los diferentes pulsos y la señal de ruido, es decir, como se vería aproximadamente si se representara la señal en un osciloscopio. Observad que en la figura 12 se considera únicamente la señal útil PAM, pero no la señal de ruido que se suma a la modulación PAM:



Siguiendo el esquema de la figura 10, las muestras obtenidas a la salida del filtro adaptado se comparan con un umbral (caso binario) o varios umbrales (caso multinivel) para obtener la secuencia de símbolos detectada. Por ejemplo, en la modulación 2-PAM polar, el umbral de comparación es el nivel de 0 volts realizando la siguiente operación para cada una de las muestras.

$$\begin{aligned} y(kT) > 0 &\Rightarrow \hat{a}[k] = \frac{+A}{2} \\ y(kT) < 0 &\Rightarrow \hat{a}[k] = \frac{-A}{2} \end{aligned} \quad (34)$$

Finalmente, el decodificador de símbolos produce  $b$  bits por cada símbolo detectado. En el caso binario y polar, se tendría la situación más inmediata, ya que el nivel positivo produce bit detectado igual a 1 y el nivel negativo produce bit detectado igual a 0.

## 4. Probabilidad de error

En los apartados precedentes, se realiza la descripción genérica de las modulaciones PAM, así como de los diagramas de bloques del modulador y demodulador para este tipo de señal. En el presente apartado se presenta la medida de la probabilidad de error como una estrategia de análisis de la calidad de las modulaciones digitales y se aplica al caso de modulaciones PAM.

Se plantea el cálculo de las dos probabilidades de error siguientes.

### Probabilidades de error

**Probabilidad de error de símbolo o SER<sup>6</sup>:**  $P_e$  es real, positiva y acotada al margen  $0 < P_e < 1$  y representa el tanto por uno de símbolos que de promedio se detectan erróneamente. Por ejemplo  $P_e = 0,01$  significa que, de promedio, de cada 100 símbolos se detectan 99 correctamente y 1, erróneamente.

**Probabilidad de error de bit o BER<sup>7</sup>:**  $P_b$  es real, positiva y acotada al margen  $0 < P_b < 1$  y representa el tanto por uno de bits que de promedio se detectan erróneamente.

Para las modulaciones binarias, cada símbolo representa un bit, por lo que ambas probabilidades coinciden. Para las modulaciones multinivel, cada símbolo representa más de un bit, por lo que en estas situaciones la probabilidad de error de bit es siempre menor que la probabilidad de error de símbolo.

<sup>(6)</sup>SER es la sigla de la expresión inglesa *symbol error rate*.

<sup>(7)</sup>BER es la sigla de la expresión inglesa *bit error rate*.

En general, interesa obtener las expresiones de ambas probabilidades de error en función de la energía media transmitida por bit ( $E_b$ ). La probabilidad de error es decreciente con la energía media transmitida por bit. En un sistema de comunicaciones digitales, se aumenta la calidad de la transmisión gastando más energía por bit, y ello redundará en una disminución de la probabilidad de error (tanto de bit como de símbolo).

### 4.1. Condiciones de cálculo de la probabilidad de error

Se enumeran a continuación las condiciones asumidas para el cálculo de la probabilidad de error:

1) El pulso transmitido se normaliza para tener energía igual a la unidad  $E_p = 1$  según la definición dada en (31). En definitiva, esta propiedad significa que el nivel de tensión resultante se fija con las amplitudes de los símbolos.

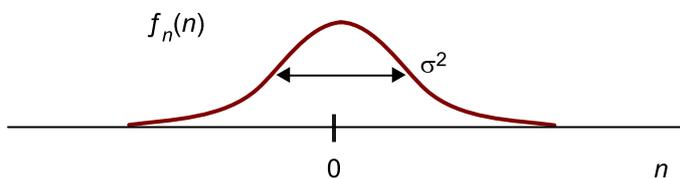
2) Los diferentes símbolos o amplitudes son equiprobables. Es decir,  $a[kT]$  puede ser cualquiera de los  $M$  valores posibles con igual probabilidad.

3) Las muestras obtenidas a la salida del filtro adaptado se hallan únicamente contaminadas por las correspondientes muestras del ruido resultante a la salida de dicho filtro, tal como se expresa en la fórmula (33).

4) Los umbrales de detección se asignan como los puntos medios entre cada dos símbolos. Tomando como ejemplo la asignación multinivel de los símbolos de la figura 10, los umbrales se sitúan en  $0, \pm A, \pm 2A$ , etc.

5) El ruido del canal  $w(t)$  es un proceso aleatorio de estadística gaussiana, por lo que el ruido resultante a la salida del filtro adaptado  $n(t) = w(t) * p(-t)$  es también de estadística gaussiana. Cada muestra de ruido  $n(kT)$  es una variable aleatoria gaussiana de media nula y varianza dada por la potencia de la propia señal de ruido  $P_n = \sigma^2$ . Su función de densidad de probabilidad se muestra en la figura 14.

Figura 14. Función de densidad de probabilidad de las muestras de ruido a la salida del filtro adaptado al pulso



El cálculo de esta potencia se realiza asumiendo la densidad espectral de ruido de canal blanco dada en (22) y aplicando las propiedades de ruido filtrado. La potencia de la señal de ruido es igual a la integral de la función de densidad espectral de la señal de ruido:

$$P_n = \sigma^2 = \int S_w(f) |P(f)|^2 df = \frac{N_0}{2} E_p = \frac{N_0}{2} \quad (35)$$

La función de densidad de probabilidad de las muestras de ruido, de media nula y de varianza  $\sigma^2$  se expresa según la fórmula dada y se representa en la figura 14.

$$n(kT): N(0, \sigma^2) \Rightarrow f(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} e^{-\frac{n^2}{2\sigma^2}} \quad (36)$$

Figura 14

Al expresar la función de densidad de probabilidad, se prescinde de la dependencia temporal de las muestras de ruido, dado que para todas las muestras se obtiene idéntica función de densidad de probabilidad, cualquiera que sea el índice temporal  $k$ . Siempre que se cumple esta propiedad, se dice que tanto el ruido de canal como el ruido filtrado son procesos aleatorios estacionarios.

#### La densidad espectral del ruido

La señal de ruido es un proceso aleatorio estacionario. La densidad espectral del ruido filtrado es igual a la densidad espectral del ruido a la entrada del filtro multiplicada por la función de transferencia del sistema en módulo y al cuadrado.

## 4.2. Probabilidad de error para una modulación 2-PAM polar

Habiendo analizado la estadística de las muestras de ruido, en este apartado se calcula la expresión exacta de la probabilidad de error para la modulación 2-polar y siempre asumiendo las condiciones dadas en el subapartado anterior. Se opera de forma muy detallada para posteriormente extrapolar el resultado a los otros casos de modulaciones PAM.

Los símbolos de una modulación polar binaria son  $(-\frac{A}{2}, +\frac{A}{2})$  asociados a los bits (0, 1) respectivamente. Bajo la hipótesis de que se ha transmitido un símbolo positivo se tiene la muestra de señal recibida condicionada a  $+\frac{A}{2}$ :

$$y(kT) = +\frac{A}{2} + n[k] \quad (37)$$

o bien, prescindiendo en este cálculo de la dependencia temporal para simplificar:

$$y = +\frac{A}{2} + n \quad (38)$$

La muestra o variable a partir de la cual se debe decidir si el bit transmitido es un 1 o un 0 se denomina *variable de decisión* y es a su vez una variable aleatoria también gaussiana de media  $+\frac{A}{2}$  y de la misma varianza que la muestra de ruido.

$$y: N(+\frac{A}{2}, \sigma^2) \Rightarrow f(y|+\frac{A}{2}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(y-\frac{A}{2})^2}{2\sigma^2}} \quad (39)$$

Análogamente, si se ha transmitido el símbolo negativo, la función de densidad de probabilidad de las muestras correspondientes es igual a:

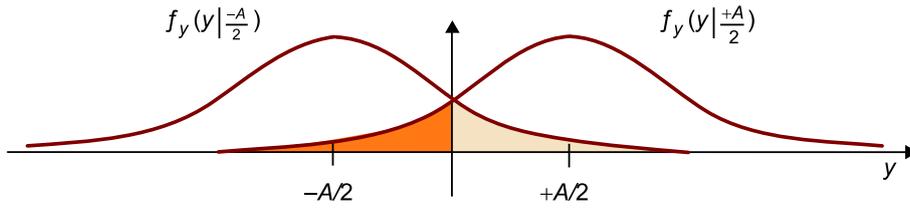
$$y: N(-\frac{A}{2}, \sigma^2) \Rightarrow f(y|-\frac{A}{2}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(y+\frac{A}{2})^2}{2\sigma^2}} \quad (40)$$

Ambas funciones de densidad de probabilidad se representan respecto a la misma variable de decisión en la figura 15. En el caso de que se haya transmitido el símbolo positivo, si se recibe una muestra negativa se producirá un error, por lo que la probabilidad de cometer un error es el área de la correspondiente función de densidad de probabilidad o f.d.p por debajo del umbral de detección, área de color gris oscuro de la figura. En el caso de que se haya transmitido el símbolo negativo, si se recibe una muestra positiva se producirá un error, por lo que la probabilidad de cometer un error es el área de la correspondiente f.d.p por encima del umbral de detección, área de sobreado claro de la figura.

### La notación

La notación  $f(y|+\frac{A}{2})$  significa la función de densidad de probabilidad de la muestra  $y = y[k]$ , condicionada a que el símbolo transmitido en el tiempo  $k$ ,  $a[k]$ , sea igual a  $+\frac{A}{2}$ .

Figura 15. Funciones de densidad de probabilidad de las muestras detectadas modulación 2-PAM polar



La probabilidad de error total es el promedio ponderado de las dos probabilidades de error condicionadas. Es decir, es la probabilidad de cometer un error cuando se ha transmitido el símbolo  $+\frac{A}{2}$  multiplicada por la probabilidad de transmitir el símbolo  $+\frac{A}{2}$ , más la probabilidad de cometer un error cuando se ha transmitido el símbolo  $-\frac{A}{2}$  multiplicada por la probabilidad de transmitir el símbolo  $-\frac{A}{2}$ .

$$P_e = \Pr\left(\frac{+A}{2}\right)\Pr\left(y < 0 \mid \frac{+A}{2}\right) + \Pr\left(\frac{-A}{2}\right)\Pr\left(y > 0 \mid \frac{-A}{2}\right) \quad (41)$$

Y, para el caso de símbolos equiprobables, se detalla a continuación, donde la función  $Q(\cdot)$  es el área de la función gaussiana centrada en el origen y de varianza igual a uno.

$$\begin{aligned} P_e &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 f_y(y|+A/2) dy + \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} f_y(y|-A/2) dy = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(y-A/2)^2}{\sigma^2}\right) dy + \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(y+A/2)^2}{\sigma^2}\right) dy = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{-\frac{A}{2\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\lambda^2}{2}\right) d\lambda + \frac{1}{2} \int_{\frac{+A}{2\sigma}}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\lambda^2}{2}\right) d\lambda = \\ &= \frac{1}{2} Q\left(\frac{A}{2\sigma}\right) + \frac{1}{2} Q\left(\frac{A}{2\sigma}\right) = Q\left(\frac{A}{2\sigma}\right) \end{aligned} \quad (42)$$

En el caso de 2-PAM polar, se concluye que la probabilidad de error es el área de la gaussiana con argumento igual al cociente entre la distancia de cada símbolo al umbral de decisión ( $\frac{A}{2}$ ), y la desviación del ruido. Este resultado es generalizable a otros tipos de modulación. Se puede aplicar siempre que los umbrales de detección se hallen en los puntos medios entre cada dos símbolos.

**El resultado final**

El resultado final del cálculo de la probabilidad de error es una integral únicamente resoluble por métodos numéricos, por lo que se deja en función de  $Q(x) = \int_x^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\lambda^2}{2}} d\lambda$ , que es el área de la gaussiana. Esta función se halla directamente relacionada con la función de error complementario  $erfc$ , ya que  $erfc(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{+\infty} e^{-\lambda^2} d\lambda$  y por tanto se cumple que  $Q(x) = \frac{1}{2} erfc\left(\frac{1}{\sqrt{2}} x\right)$ . Esta expresión es útil, ya que la función  $erfc$  suele estar implementada en muchas aplicaciones matemáticas o bien tabulada en muchos libros de probabilidad, y se puede consultar como paso intermedio para obtener la probabilidad de error numérica. En el apartado de fórmulas matemáticas se presenta una gráfica de la función  $Q(x)$ .

En resumen, la probabilidad de error de símbolo coincide con la probabilidad de error de bit para la modulación 2-PAM polar y es igual a:

$$P_b = P_e = Q\left(\frac{A}{2\sigma}\right) \quad (43)$$

Dado que la energía media de bit para una modulación 2-polar en las condiciones dadas es  $E_b = \frac{A^2}{4}$  y la potencia de las muestras de ruido es  $\sigma^2 = \frac{N_0}{2}$ , la probabilidad en (43) se expresa en función del cociente de energías  $\frac{E_b}{N_0}$ , también denominado SNR por bit.

$$P_b = P_e = Q\left(\sqrt{2\frac{E_b}{N_0}}\right) \quad (44)$$

### 4.3. Probabilidad de error para una modulación 2-PAM unipolar

En la modulación binaria unipolar se transmiten los símbolos (0, +A) que corresponden respectivamente a los bits (0, 1). Las dos f.d.p. condicionadas de las muestras recibidas son similares a las de la figura 15, con la diferencia de que ahora están centradas en (0, +A), por lo que, en las condiciones descritas en el apartado 3.1, se sitúa el umbral en el punto medio entre los dos símbolos  $\frac{+A}{2}$ , y la probabilidad de error obtenida coincide con la dada en (43). Este resultado podría inducir a pensar que las modulaciones polares y unipolares presentan el mismo comportamiento en cuanto a probabilidad de error; sin embargo, los dos resultados sólo son comparables cuando se expresa el argumento de la función  $Q(\cdot)$  en función del cociente de energías  $\frac{E_b}{N_0}$ .

Para la modulación 2-PAM unipolar de símbolos equiprobables y pulsos de energía unidad, la energía media de la señal modulada transmitida por bits es:

$$E_b = E_s = E[a_m^2] = \frac{1}{2}(0 + A^2) = \frac{A^2}{2} \quad (45)$$

Por lo que, sustituyendo  $A$  y  $\sigma$  en (43) se obtiene:

$$P_b = P_e = Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right) \quad (46)$$

La probabilidad de error obtenida para 2-PAM unipolar (46) es peor que la obtenida para 2-PAM polar (44), ya que, si en ambas se requiere idéntica probabilidad de error y en igualdad de condiciones en cuanto al ruido del canal, en el caso de la unipolar se ha de transmitir el doble de energía media por bit. En el ejemplo 5 se demuestra numéricamente este resultado.

#### Ejemplo 5. Cálculo de probabilidad de error

En un sistema de transmisión binario, se invierte una energía media por bit igual a  $E_b = 5N_0$ , siendo  $N_0$  la constante de la densidad espectral del ruido del canal ideal AWGN según (22). Se calcula la probabilidad de error para la modulación polar y para la modulación unipolar.

Para ambas modulaciones, el cociente de energías es:

$$\frac{E_b}{N_0} = 5$$

Con ayuda de la gráfica que muestra la función  $Q(\cdot)$  y que se presenta en el Anexo “Fórmulas matemáticas”, se obtienen las probabilidades:

$$P_b(\text{Polar}) = Q(\sqrt{10}) = Q(3,16) \cong 7,82 \cdot 10^{-4}$$

$$P_b(\text{Unipolar}) = Q(\sqrt{5}) = Q(2,24) \cong 1,27 \cdot 10^{-2}$$

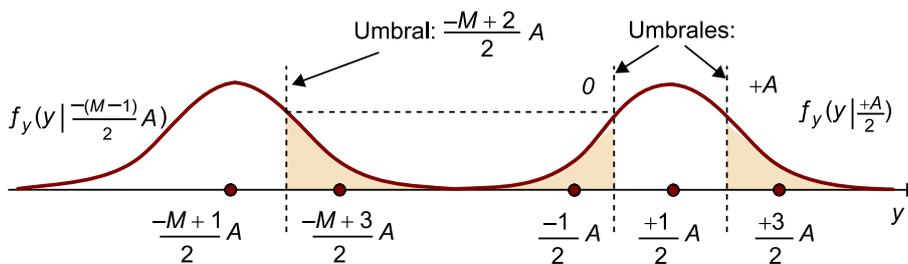
Se observa, por tanto, la superioridad en cuanto a comportamiento del sistema de la modulación polar. Si se deseara equiparar la calidad de la modulación unipolar a la de la modulación polar, se debería doblar la energía media por bit para el caso unipolar o, dicho de otro modo, aumentar en 3 dB la energía invertida por bit.

#### 4.4. Probabilidad de error para una modulación M-PAM polar

En los apartados 3.2 y 3.3 se calculan las probabilidades de error para dos casos binarios, y por tanto para dos situaciones en las que no se distingue entre probabilidad de error de símbolo (SER) y probabilidad de error de bit (BER).

En el caso multinivel, se calcula previamente la probabilidad de error de símbolo y posteriormente la probabilidad de error de bit. Asumiendo las condiciones dadas en el apartado 3.1, las muestras recibidas a la salida del filtro adaptado de la figura 10 condicionadas a cada uno de los posibles símbolos transmitidos presentan unas f.d.p de gaussianas centradas en el correspondiente símbolo.

Figura 16. Funciones de densidad de probabilidad de las muestras detectadas modulación M-PAM polar



En la figura 16 se representan únicamente las f.d.p. correspondientes a dos símbolos de un caso genérico. El primer símbolo  $(\frac{-M-1}{2}A)$ , es un símbolo situado en un extremo, por la que la probabilidad de error condicionada al mismo es el área representada en blanco de su f.d.p. a partir del umbral  $\frac{-M-2}{2}A$ , y equivale a  $Q(\frac{A}{2\sigma})$ . El segundo símbolo para el que se ha representado su f.d.p.,  $\frac{+A}{2}$ , es interior y se halla delimitado por dos umbrales: 0,+A. La probabilidad de error condicionada es la probabilidad de que la muestra de señal recibida cuando se ha transmitido el símbolo se halle fuera del margen delimitado por los dos umbrales. Como cada uno de los dos umbrales dista  $\frac{A}{2}$  del símbolo en cuestión, el área total compuesta por las dos zonas representadas en blanco es

el doble que la obtenida para un símbolo extremo y es igual a  $2Q\left(\frac{A}{2\sigma}\right)$ . Al calcular la probabilidad de error total con equiprobabilidad de símbolos y teniendo en cuenta que se tienen dos símbolos extremos y  $(M-2)$  símbolos internos, se ha de calcular la suma de las probabilidades de error condicionadas a cada uno de los posibles símbolos transmitidos  $Pr(error|a_m)$ , y multiplicada por la correspondiente probabilidad de símbolo  $Pr(a_m)$ :

$$P_e = \sum_{m=1}^{m=M} Pr(a_m) Pr(error|a_m) = \frac{1}{M} (2Q\left(\frac{A}{2\sigma}\right) + (M-2)2Q\left(\frac{A}{2\sigma}\right)) = \frac{2(M-1)}{M} Q\left(\frac{A}{2\sigma}\right) \quad (47)$$

La distancia entre símbolos  $A$  se relaciona con la energía media por bit obtenida en (20) y la desviación de ruido  $\sigma$  se relaciona con la densidad espectral de ruido según (35) con lo que se tiene:

$$P_e = \frac{2(M-1)}{M} Q\left(\sqrt{\frac{6b}{M^2-1} \frac{E_b}{N_0}}\right) \quad (48)$$

La BER en el mejor de los casos se obtiene a partir de la SER bajo las siguientes consideraciones:

- Los errores de símbolo sólo se producen entre símbolos vecinos o colindantes. Si el nivel de señal predomina sobre el nivel de ruido ( $\frac{E_b}{N_0} > 1$ ), la probabilidad de que la muestra de señal recibida se halle distanciada dos umbrales más allá del nivel realmente transmitido es muy baja y se considera nula a todos los efectos.
- Dos símbolos colindantes corresponden a agrupaciones de  $b$  bits que únicamente se diferencian en uno de ellos. Este tipo de codificación se denomina *codificación de Gray*. Si, por ejemplo, para un caso de  $M = 8$  símbolos el tercer símbolo representa la terna de bits 000, el anterior podría representar la terna 100 y el posterior la terna 010.

Asumiendo ambas consideraciones, y siguiendo con el ejemplo de 8-PAM, si por cada cien símbolos transmitidos se produce un único error en media, la SER del sistema es  $P_e = \frac{1}{100} = 0,01$ . Al decodificar cada símbolo correcto, se obtienen tres bits correctos. Al decodificar cada símbolo erróneo, se obtienen dos bits correctos y un bit erróneo, por tanto de cada 300 bits transmitidos, en media se detecta un único bit erróneamente y la BER es  $P_b = \frac{1}{300} = \frac{P_e}{3}$ . En el caso general, la BER de las modulaciones M-PAM es igual a la SER dividida por el número de bits que se transmiten por cada símbolo:

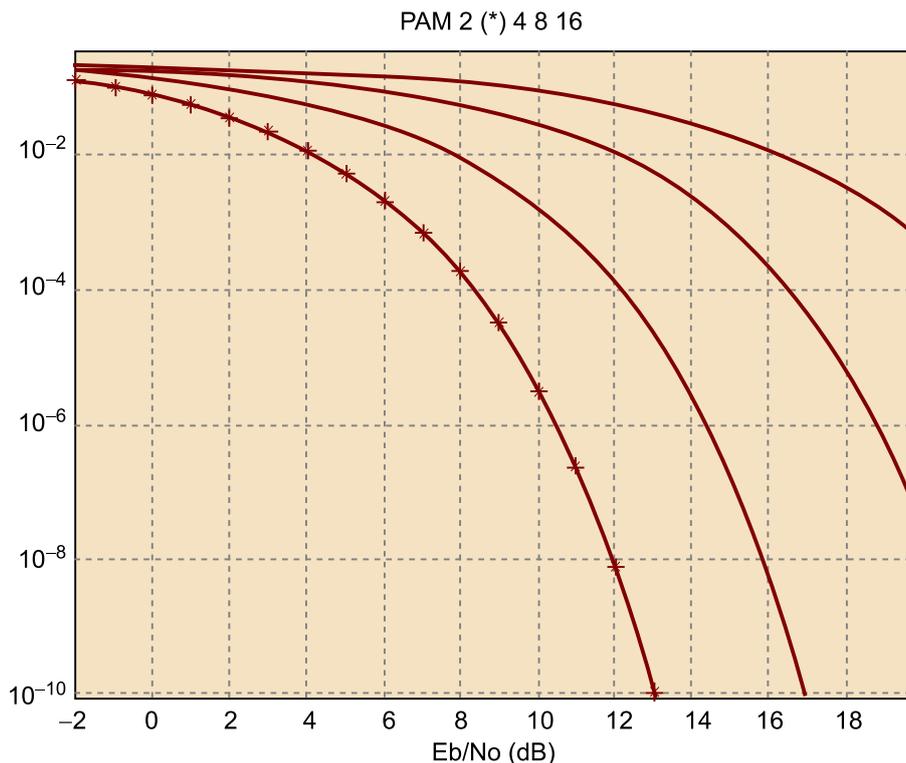
$$P_b = \frac{1}{b} P_e = \frac{2(M-1)}{bM} Q\left(\sqrt{\frac{6b}{M^2-1} \frac{E_b}{N_0}}\right) \quad (49)$$

La expresión dada para la BER en (49) es útil para comparar modulaciones de pulsos M-PAM entre sí. Es interesante obtener valores para la BER cuando se transmite una secuencia de bits a una velocidad de bit fijada e invirtiendo una energía por bit también fijada. De los diferentes posibles formatos de modulación PAM ( $M = 2, 4, 8, 16$ , etc.), el que presente una BER menor es el que resulta de mejor calidad.

La figura 16 muestra las diferentes BER para modulaciones multinivel. Si se fija el cociente de energías  $\frac{E_b}{N_0}$  y la velocidad de bit del sistema, el número de niveles  $M$  más conveniente se obtiene como la resolución de la siguiente situación de compromiso:

- Al aumentar el número de niveles, se degrada la BER (inconveniente).
- Al aumentar el número de niveles, disminuye la velocidad de símbolo  $r = \frac{r_b}{b}$  y, para este tipo de modulación (M-PAM polar), ello repercute en un decremento del ancho de banda necesario (ventaja).

Figura 17. BER en función del cociente de energías para M-PAM polar,  $M = 2(*), 4, 8, 16$



### Ejemplo 6. Modulación M-PAM sobre canal telefónico

Un sistema de comunicaciones digitales transmite información mediante una modulación M-PAM sobre un canal telefónico cuyo ancho de banda máximo permite la transmisión de una velocidad de símbolo de  $r = 2.400$  símbolos/s. El canal es ideal y AWGN. Se requiere una BER del orden de  $10^{-5}$ . Se calcula a continuación el cociente de energías necesario  $\frac{E_b}{N_0}$  para cada una de las dos velocidades de bit ( $r_b$ ) siguientes: 4.800 y 9.600 bits/s.

En cada una de las dos situaciones, la velocidad de bit requerida determina el número de niveles de la modulación. El cociente de velocidades  $\frac{r_b}{f}$  es el número de bits que debe transportar cada símbolo. La modulación elegida en cada caso es 4-PAM (2 bits/símbolo) y 16PAM (4 bits/símbolo).

El cociente de energías  $\frac{E_b}{N_0}$  se calcula invirtiendo la fórmula de la BER obtenida en (49):

$$\frac{E_b}{N_0} = \frac{M^2-1}{6b} \left( Q^{-1} \left( \frac{bM}{2(M-1)} P_b \right) \right)^2 \quad (50)$$

Para la modulación 4-PAM ( $b = 2, M = 4$ ):

$$\begin{aligned} \frac{E_b}{N_0} &= \frac{15}{12} \left( Q^{-1} \left( \frac{8}{6} 10^{-5} \right) \right)^2 = \frac{5}{4} \left( Q^{-1} \left( \frac{4}{3} 10^{-5} \right) \right)^2 \cong \frac{5}{4} (4,3)^2 = 23,1 \Rightarrow \\ \left( \frac{E_b}{N_0} \right)_{\text{dB}} &= 10 \log_{10}(23,1) = 13,6 \text{ dB} \end{aligned} \quad (51)$$

Para la modulación 16-PAM ( $b = 4, M = 16$ ):

$$\begin{aligned} \frac{E_b}{N_0} &= \frac{255}{24} \left( Q^{-1} \left( \frac{64}{30} 10^{-5} \right) \right)^2 = \frac{255}{24} \left( Q^{-1} \left( 2,1 10^{-5} \right) \right)^2 \cong \frac{255}{24} (4,1)^2 = 178 \Rightarrow \\ \left( \frac{E_b}{N_0} \right)_{\text{dB}} &= 10 \log_{10}(178) = 22,5 \text{ dB} \end{aligned} \quad (52)$$

En el caso 16-PAM, la demanda de energía transmitida por bit aumenta considerablemente respecto al caso 4-PAM. Ello es debido a que, mediante 16-PAM, se transmite con una mayor tasa de bit que con 4-PAM y los requisitos de BER son idénticos en ambos casos.

## 5. Ocupación espectral de las modulaciones de pulsos

En el apartado anterior, se ha presentado la estrategia necesaria para el cálculo de las probabilidades de error de símbolo (SER) y de bit (BER) considerando un canal de transmisión ideal. Es decir, el canal no distorsionaba la forma de la señal transmitida y, por lo tanto, cada uno de los pulsos recibidos a la entrada del filtro adaptado del demodulador PAM (figura 11) coincide con el correspondiente pulso transmitido  $p(t)$ , salvo constante o retardo temporal. Implícitamente se ha asumido que el ancho de banda en el que el canal presenta una función de transferencia constante es mayor que el ancho de banda necesario para poder transmitir el pulso sin que quede distorsionado por el canal.

Recordad que la forma del pulso recibido se relaciona con la forma del pulso transmitido mediante la respuesta impulsional del canal (dominio del tiempo) o de la función de transferencia del canal (dominio de la frecuencia).

$$\begin{aligned} p_R(t) &= p(t) * h_c(t) \\ P_R(f) &= P(f)H_c(f) \end{aligned} \quad (53)$$

Si el ancho de banda sin distorsión del canal es  $B_c$ , eso significa que, en el margen de frecuencias comprendido en este ancho de banda, la función de transferencia presenta el siguiente comportamiento:

$$H_c(f) = \begin{cases} \alpha e^{-j2\pi f t_d} & |f| \leq B_c \\ \text{Irrelevante} & |f| > B_c \end{cases} \quad (54)$$

En ocasiones, coloquialmente hablando, se dice que el ancho de banda se reparte entre diferentes señales moduladas. En cualquier caso, en este apartado designamos mediante  $B_c$  el ancho que puede ocupar la transmisión de la modulación digital que se esté analizando.

Si el ancho de banda del pulso es menor que el ancho de banda del canal, la forma del pulso recibida coincide con la transmitida.

$$B_p \leq B_c \Rightarrow p_R(t) = \alpha p(t - t_d) \quad (55)$$

Por tanto, en la mayoría de los sistemas de comunicaciones, el ancho de banda de canal disponible es limitado. Como consecuencia, el diseñador del sistema debe considerar las restricciones impuestas por el ancho de banda disponible para elegir el formato de modulación. En el caso de las modulaciones de pulsos, la forma temporal del pulso es la que influye directamente en la forma final de la densidad espectral de la señal transmitida. Y más concretamente, se puede afirmar que el ancho de banda del pulso coincide con el ancho de banda de la

modulación. El objetivo de este apartado se centra en el cálculo de la densidad espectral del pulso que soporta la modulación, definida en el subapartado 2.3, como paso previo a determinar el ancho de banda de la señal modulada.

### 5.1. Densidad espectral con pulsos rectangulares

Para una modulación de pulsos rectangulares NRZ, se tiene que la transformada de Fourier del pulso ( $TF$ ) es:

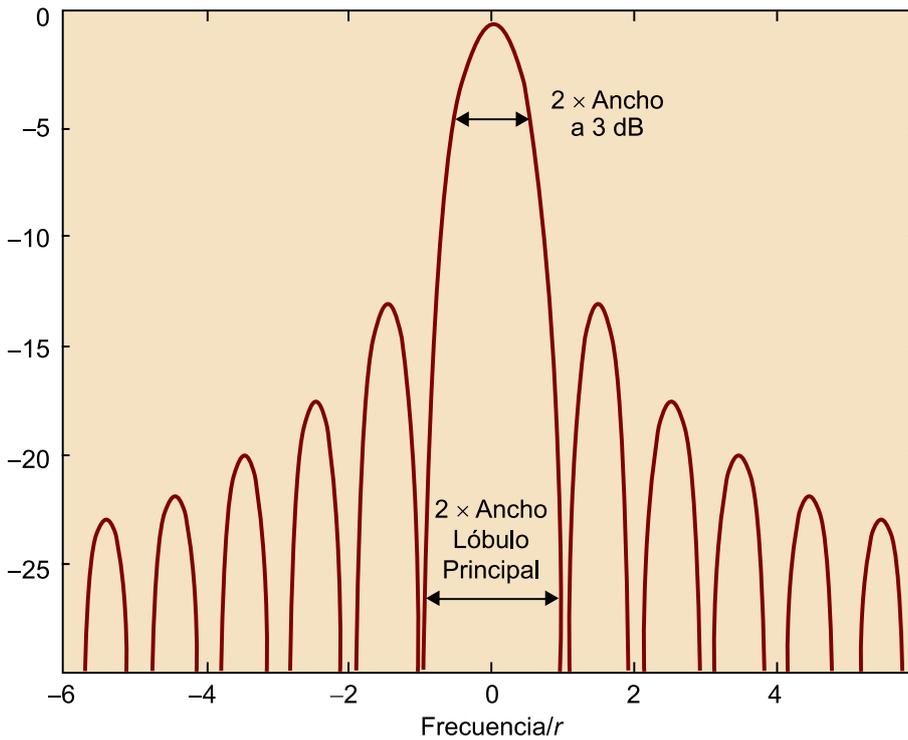
$$P(f) = TF\left[\Pi\left(\frac{t}{T}\right)\right] = \frac{\text{sen}(\pi f T)}{\pi f} \quad (56)$$

La densidad espectral de la señal modulada es proporcional al módulo de la transformada de Fourier de la función pulso elevado al cuadrado. Estrictamente, al considerar el pulso rectangular, la ocupación espectral es infinita, pues la forma frecuencial (56) se extiende desde menos infinito a más infinito. Al tratar con pulsos limitados temporalmente al tiempo de símbolo, o de menor duración como en el caso RZ, la propiedad anterior es inevitable. Una función de duración temporal limitada presenta una ocupación espectral ilimitada.

La representación espectral suele hacerse en dB, como  $20\log_{10}(|P(f)|)$

- Se define el ancho de banda a 3 dB como el ancho de banda en el que la representación espectral del pulso cae 3 dB respecto a su máximo.
- Se define el ancho de banda entre ceros como el ancho de banda del lóbulo principal.

Figura 18. Función de densidad espectral del pulso NRZ en dB (eje vertical)



El eje frecuencial se halla normalizado a la velocidad de símbolo  $r$ , es decir, se halla dividido por la velocidad de símbolo  $r$ .

En la práctica, cuando se trabaja con modulaciones cuyos pulsos son de duración temporal limitada, debe hacerse en condiciones tales que los lóbulos secundarios no interfieran a otras señales. En las denominadas *modulaciones de códigos de línea*, las señales transmitidas por el cable no se suelen multiplexar, es decir, no suelen compartir el canal con otras señales, por lo que la ocupación espectral no representa un problema, más allá de que el propio cable atenúe las frecuencias altas.

En otro tipo de transmisiones, como por ejemplo en aplicaciones electromagnéticas, muchas señales comparten simultáneamente el medio, multiplexándose en frecuencia, por lo que el ancho de banda asignado a cada señal o usuario debe respetarse en la medida de lo posible. En este tipo de aplicación suele regularizarse no tan sólo el ancho de banda, sino también las exigencias de caída en dB para los lóbulos secundarios que sobrepasan más allá de la banda asignada. Por ejemplo, el estándar de televisión digital terrestre (DVB) presenta una plantilla para cada emisora de 8 MHz de ancho de banda. Más allá del ancho de banda, cada emisora debe presentar una atenuación superior a 40 dB y decaer del orden de 13 dB/octava.

## 5.2. Modulaciones PAM con pulsos *sinc*

En este apartado se estudia el pulso dual al rectangular NRZ. El pulso dual significa que es el que tiene intercambiadas las formas frecuencial y temporal y, por lo tanto, el dual al pulso rectangular, en tiempo es una función de tipo

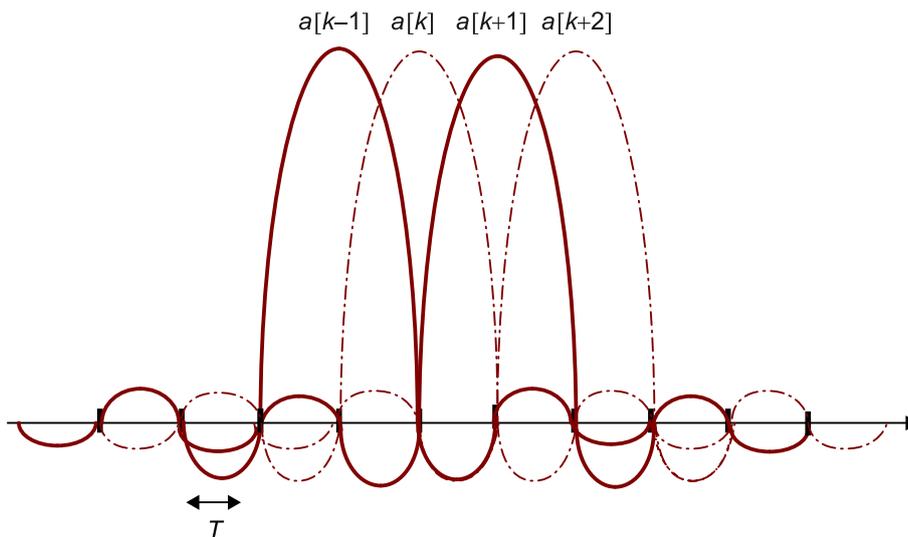
*sinc* y en frecuencias es de tipo rectangular. A la salida del filtro adaptado de la figura 10 y también de la figura 11, el pulso que interesa tener es una función *sinc* que presenta ceros cada  $T$  segundos, siendo  $T$  el tiempo de símbolo.

$$R_p(t) = \text{sinc}(rt) = \frac{\text{sen}(\pi rt)}{\pi rt} = \frac{\text{sen}(\pi \frac{t}{T})}{\pi \frac{t}{T}} \quad (57)$$

La condición de presentar ceros se requiere para evitar la ISI<sup>8</sup> o interferencia intersimbólica, concepto que se define formalmente en el subapartado 6.1. Si llegan pulsos *sinc* consecutivos y espaciados cada  $T$  segundos al muestrear un pulso en un instante de tiempo correspondiente a su máximo, el resto de los pulsos que son de duración ilimitada presentan un cero para el mismo instante de tiempo, evitando que se produzca interferencia de unos símbolos a otros. En la figura 19 se muestra una secuencia de cuatro pulsos de tipo *sinc* y es de destacar que, en el instante de tiempo en que cada una de las funciones presenta un máximo, el resto de las funciones presentan un cero.

<sup>(8)</sup>ISI és la abreviatura de *InterSymbol Interference*.

Figura 19. Pulsos *sinc* espaciados a tiempo de símbolo



Cada pulso transporta un símbolo.

Para obtener este tipo de pulso a la salida del filtro adaptado, la forma dada en (57) coincide con la autocorrelación del pulso que se debe transmitir, cuya función es a su vez un pulso *sinc*, como se demuestra a continuación.

Para forzar que la forma del pulso equivalente a la salida del filtro adaptado sea la función *sinc*, cuando el pulso que se recibe es  $p(t)$  y se convoluciona con la respuesta impulsional del filtro adaptado  $p(-t)$ , se ha de cumplir:

$$p(t) * p(-t) = R_p(t) = \text{sinc}(rt) \quad (58)$$

En el dominio de la frecuencia se obtiene cuál debe ser la forma frecuencial o transformada de Fourier del pulso que se debe transmitir para que se cumpla la ecuación (58):

$$\left|P(f)\right|^2 = \frac{1}{r} \Pi\left(\frac{f}{r}\right) \Rightarrow P(f) = \sqrt{\frac{1}{r}} \Pi\left(\frac{f}{r}\right) \quad (59)$$

Y, finalmente, volviendo al dominio temporal:

$$p(t) = \sqrt{r} \operatorname{sinc}(rt) \quad (60)$$

La última expresión es el pulso que se debe transmitir. Su energía es igual a 1. La respuesta impulsional del filtro adaptado coincide con la propia función pulso.

Estrictamente, al considerar el pulso *sinc*, la duración temporal es infinita, pues la función se extiende desde menos infinito a más infinito y su transformada de Fourier es de ancho de banda limitado. En particular, el ancho de banda es de  $\frac{r}{2}$  Hz, debido a que la ocupación frecuencial es igual a  $r$  Hz considerando frecuencias positivas y negativas. El ancho de banda de las modulaciones PAM soportadas por funciones *sinc* es también  $\frac{r}{2}$  Hz, pues coincide con el ancho de banda del pulso.

El ancho de banda que presenta la función *sinc*,  $\frac{r}{2}$ , resulta el menor ancho de banda que se puede utilizar para obtener una modulación PAM a  $r$  símbolos/seg sin interferencia entre símbolos consecutivos. Dicho de otro modo, no existe ningún otro tipo de pulso, cuyo ancho de banda, sea menor al de la función *sinc* y que presente ISI igual a cero.

El pulso *sinc* es un pulso ideal, ya que con él se consigue el mínimo ancho de banda, y muy interesante a nivel académico, debido a las propiedades de dualidad respecto al pulso rectangular NRZ.

En la práctica, sin embargo, es un pulso difícilmente implementable. Su característica frecuencial tan abrupta, con una banda de transición nula, hace que sea difícil de conseguir. Otro inconveniente viene dado por la atenuación de los lóbulos secundarios en el dominio del tiempo. Los lóbulos secundarios decaen de forma inversamente proporcional al eje temporal. Esta propiedad no es muy deseable, porque en situaciones de sincronismo imperfecto de reloj se puede producir un nivel elevado de interferencia entre los símbolos (ISI).

### 5.3. Pulsos de raíz de coseno realzado

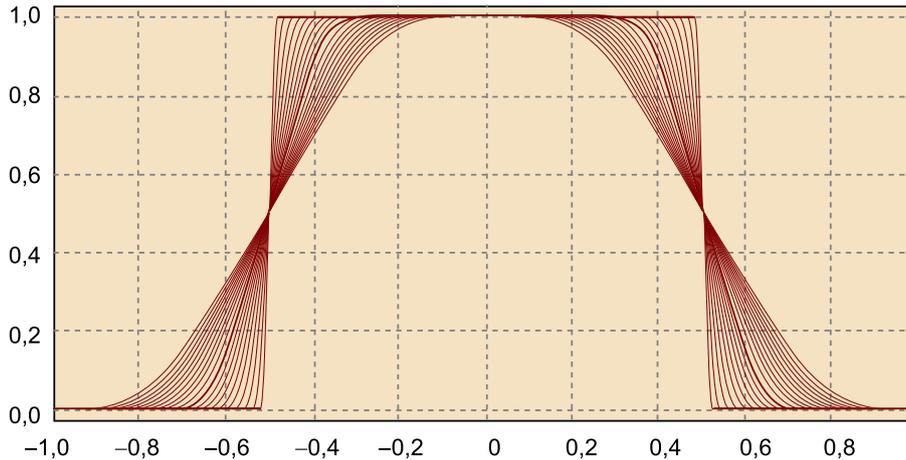
Los pulsos de raíz de coseno realzado, a los que se denomina RRC<sup>9</sup> en el resto del documento, consisten en una generalización del pulso *sinc* y son útiles para suavizar los problemas de implementación que presenta el pulso *sinc*. Los pulsos RRC se forman extendiendo el ancho de banda del pulso *sinc* a la vez que se mantienen las condiciones de ISI nula, o de presentar ceros a tiempo de símbolo. Para generalizar los pulsos *sinc*, se utiliza una parametrización que

<sup>(9)</sup>RRC es la sigla de la expresión inglesa *root raised cosinus*.

viene dada por el exceso de ancho de banda respecto al pulso *sinc*. El exceso máximo puede llegar a ser del 100%, es decir, en el caso extremo se llega a doblar el ancho de banda y a tener pulsos de ancho de banda  $r$  Hz.

Si  $\alpha$  representa el parámetro que indica el exceso de ancho de banda respecto al pulso *sinc*,  $0 \leq \alpha \leq 1$ , el ancho de banda del correspondiente pulso RRC es de  $\frac{r}{2}(1+\alpha)$  Hz y la banda de transición ocupa  $\alpha r$ . El parámetro  $\alpha$  se denomina factor de caída o de *rolloff*. El caso particular de  $\alpha = 0$  corresponde al pulso *sinc*.

Figura 20. Densidad espectral de los pulsos RRC



Se han representado para diferentes valores del factor de *rolloff* desde 0 (pulso *sinc*) hasta 1. En trazo más grueso se ha representado la forma correspondiente al factor de *rolloff* 0,5. El eje frecuencial se halla normalizado a la velocidad de símbolo  $r$ .

La forma frecuencial representada en la figura 20 es la densidad espectral de los pulsos RRC y, su expresión exacta es:

$$S_{P_{RRC}}(f) = \begin{cases} \frac{1}{r} & |f| < \frac{r}{2}(1-\alpha) \\ \frac{1}{2r} \left(1 + \cos\left(\frac{\pi}{\alpha r} \left(|f| - \frac{r}{2}(1-\alpha)\right)\right)\right) & \frac{r}{2}(1-\alpha) < |f| < \frac{r}{2}(1+\alpha) \\ 0 & \frac{r}{2}(1+\alpha) < |f| \end{cases} \quad (61)$$

Donde  $r$  representa la velocidad de símbolo y  $\alpha$  el factor de *rolloff*.

El ancho de banda resultante, tanto para el pulso como para la señal modulada, es igual a:

$$B_p = B_s = \frac{r}{2}(1+\alpha) \quad (62)$$

Para obtener esta forma a la salida del filtro adaptado, la transformada de Fourier del pulso que debe transmitirse, así como la función de transferencia del filtro adaptado corresponden a la raíz cuadrada de la función (61), de ahí el nombre de los pulsos: *raíz de coseno realzado*.

$$P_{RRC}(f) = \sqrt{S_{P_{RRC}}(f)} \quad (63)$$

En el dominio del tiempo, el pulso resultante a la salida del filtro adaptado se halla libre de ISI.

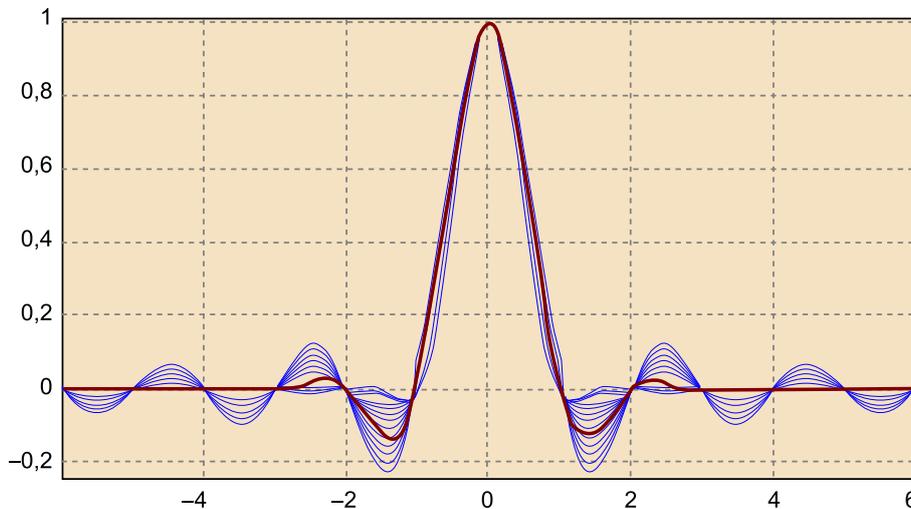
$$p_{RRC}(t) * p_{RRC}(-t) = R_{P_{RRC}}(t) = \text{sinc}(rt) \frac{\cos(\pi\alpha rt)}{1 - (2\alpha rt)^2} \quad (64)$$

La ecuación (64) corresponde a los pulsos resultantes a la salida del filtro adaptado. Se puede observar que en el caso particular de que el parámetro de *rolloff* sea nulo  $\alpha = 0$ , la forma obtenida coincide con la función *sinc*.

En la transmisión de una modulación PAM, al muestrear la señal resultante a tiempo de símbolo, cada pulso presenta un máximo igual a 1 y ceros cada  $T$  segundos, de forma análoga a lo obtenido en la ecuación (57) para el pulso *sinc*. La caída de los lóbulos secundarios temporales es de mayor rapidez a mayor factor de *rolloff*, por lo que se han suavizado los dos inconvenientes prácticos que presentan los pulsos *sinc*: caída lenta de lóbulos secundarios temporales y forma frecuencial abrupta en el dominio de la frecuencia.

En la figura 21 se muestran diferentes formas temporales de pulsos resultantes a la salida del filtro adaptado para diferentes factores de *rolloff*.

Figura 21. Autocorrelación de los pulsos RRC



Se han representado para diferentes valores del factor de *rolloff* desde 0 (pulso *sinc*) hasta 1. En trazo más grueso se ha representado la forma correspondiente al factor de *rolloff* 0,5. El eje temporal se halla normalizado al tiempo de símbolo  $T$ .

Los pulsos RRC son útiles en aplicaciones en las que el ancho de banda que debe repartirse entre diferentes usuarios o señales es limitado.

Existen muchos estándares de comunicaciones cuyas modulaciones son soportadas por pulsos RRC. En la mayor parte de ellos, el factor de *rolloff* elegido oscila entre 0,2 y 0,35 aproximadamente. Un caso práctico de utilización de pulsos RRC es el estándar de telefonía inalámbrica de tercera generación UMTS.

**Ejemplo 7. Elección de rolloff**

Se dispone de un ancho de banda de 3 MHz para la transmisión de una secuencia de bits a la velocidad de 10 Mbps. Se plantea la modulación cuaternaria, a cuatro niveles, ( $M = 4$ ) y se requiere calcular el máximo factor de *rolloff* que debe implementarse al modular mediante pulsos RRC.

La modulación a cuatro niveles da lugar a una modulación de símbolos a la velocidad de:

$$r = \frac{r_b}{2} = 5 \text{ Msímbolos/s}$$

Si se transmitiera con un pulso *sinc*, el ancho de banda necesario sería de

$$B_{\text{sinc}} = \frac{r}{2} = 2,5 \text{ MHz}$$

Dado que se tiene disponible un ancho de banda de 3 MHz, el exceso máximo utilizable es de 0,5 MHz y, según la fórmula de ancho de banda (62), se calcula el factor de *rolloff* como

$$\alpha \frac{r}{2} = 0,5 \text{ MHz} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{5} = 0,2$$

Por lo que la solución más adecuada consiste en elegir un pulso RRC con este factor de *rolloff*.

## 6. Interferencia intersimbólica

El término de *interferencia intersimbólica* o ISI aparece en apartados precedentes, y sus efectos sobre el comportamiento del sistema se estudian de forma detallada en el presente apartado.

Existen muchos fenómenos, en general no deseados, que producen ISI sobre la señal. El más importante es el producido por canales no ideales. Si, al realizar la detección de los símbolos, las muestras a la entrada del detector presentan ISI, la probabilidad de error se degrada aumentando considerablemente respecto a un caso libre de ISI.

En el apartado dedicado al demodulador M-PAM, se define canal ideal cuando el canal físico puede modelarse como un sistema lineal e invariante en tiempo, cuya respuesta impulsional presenta únicamente atenuación y retardo. De hecho, la fórmula (21) corresponde a la respuesta impulsional de un canal ideal que ni siquiera atenúa ni retarda la señal.

En este apartado, se plantea la situación de que el canal no sea ideal y que por tanto produzca ISI sobre la señal muestreada.

### 6.1. Interferencia intersimbólica ISI

#### ISI

Se produce ISI cuando, al muestrear la señal a la salida del filtro adaptado a una muestra por símbolo, la muestra obtenida, además del símbolo que debe detectarse y de la componente de ruido, presenta de forma superpuesta aditivamente contribución de símbolos precedentes y/o de símbolos posteriores. Este fenómeno se formula como:

$$y(nT) = d[n]c[0] + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq n}}^{+\infty} d[k]c[n-k] + n(nT) \quad (65)$$

El segundo sumando correspondiente al sumatorio representa el término de ISI y provoca una degradación sobre la probabilidad de error. Los términos representados como  $c[n]$  son las muestras del pulso resultante a la salida del filtro adaptado.

El ejemplo 8 ilustra una situación típica en la que las múltiples reflexiones de la señal transmitida en una transmisión inalámbrica pueden provocar ISI.

**Ejemplo 8. ISI producida por canal no ideal**

Se considera la transmisión de una modulación 2-PAM polar basada en pulsos NRZ por un canal no ideal. La respuesta impulsional del canal presenta un enlace o camino principal y un eco o camino secundario. El ejemplo constituye un caso particular de canal multicamino o multipath.

Se considera la señal modulada PAM de símbolos binarios y equiprobables:  $a[k] = \pm \frac{A}{2}$  y de pulsos NRZ normalizados de tal modo que su energía es igual a 1

$$p(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \Pi\left(\frac{t}{T}\right) \quad (66)$$

Señal modulada 2-PAM polar

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a[k] p(t - kT) \quad (67)$$

Se transmite por un canal de comunicaciones. La respuesta impulsional del canal se halla formada por el enlace principal o directo entre el transmisor y el receptor y una reflexión o eco, según se muestra en la figura 22.

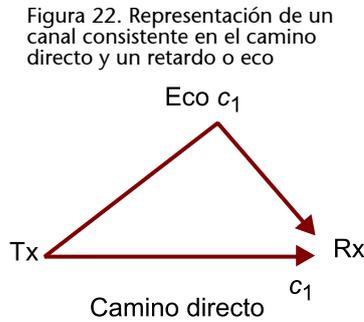


Figura 22. Representación de un canal consistente en el camino directo y un retardo o eco

La respuesta impulsional correspondiente al camino directo y un eco de retardo igual al tiempo de símbolo  $T$  se modela como:

$$h(t) = c_0 \delta(t) + c_1 \delta(t - T) \quad (68)$$

El ruido aditivo se modela como de costumbre como un proceso aleatorio estacionario de media nula, blanco y gaussiano de densidad espectral

$$S_w(f) = \frac{N_0}{2} \quad (69)$$

Por tanto, la señal a la entrada del receptor se formula como:

$$\begin{aligned} r(t) &= s(t) * h_c(t) + w(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a[k] p(t - kT) * (c_0 \delta(t) + c_1 \delta(t - T)) + w(t) = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a[k] (c_0 p(t - kT) + c_1 p(t - kT - T)) + w(t) \end{aligned} \quad (70)$$

Si el receptor se diseña mediante filtro adaptado al pulso transmitido tal como se modela en la figura 11, la señal a la salida del filtro adaptado es igual a:

$$y(t) = r(t) * p(-t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a[k] (c_0 R p(t - kT) + c_1 R p(t - kT - T)) + n(t) \quad (71)$$

El sumatorio de la expresión anterior se interpreta como una modulación PAM, también binaria y polar y con pulso equivalente igual a:

$$p_{FA}(t) = p(t) * h_c(t) * p(-t) = c_0 R_p(t) + c_1 R_p(t - T) = c_0 \Lambda\left(\frac{t}{T}\right) + c_1 \Lambda\left(\frac{t-T}{T}\right) \quad (72)$$

Una forma de reescribir la expresión dada en (71) es mediante la forma del pulso definida en (72):

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} d[k] p_{FA}(t - kT) + n(t) \quad (73)$$

El pulso resultante  $p_{FA}(t)$  se muestra en la figura 23 y es un pulso de duración igual a tres periodos de símbolo y que presenta dos muestras no nulas cuando se muestrea a tiempo de símbolo.

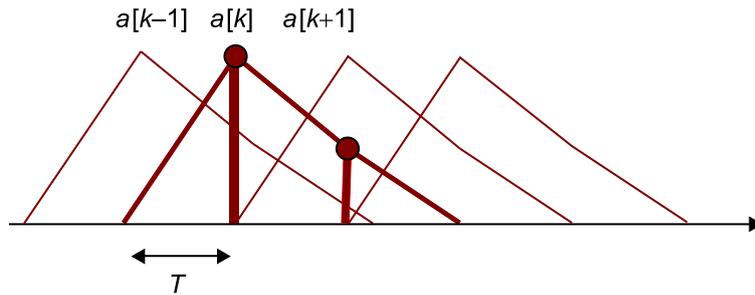


Figura 23. Pulsos resultantes con ISI a la salida del filtro adaptado

La señal  $y(t)$  de la expresión (73) es muestreada a tiempo de símbolo para realizar la decisión de los símbolos y queda como:

$$y(nT) = c_0 d[n] + c_1 d[n - 1] + n(nT) \quad (74)$$

De (74) se concluye que el eco del canal produce directamente ISI sobre las muestras de señal. Idealmente, debería obtenerse únicamente el término correspondiente al símbolo que se quiere detectar, en este caso  $a[n]$ , pero por un lado se tiene el término de ruido  $n[nT]$  y además en este caso la muestra de ISI:  $c_1 a[n-1]$ .

Notad que, en la expresión anterior, la ISI sobre las muestras disponibles para la detección se halla provocada únicamente por el símbolo anterior al actual. Éste es un caso particular del caso general formulado en (65), en el que cada muestra sufre interferencia de todos los símbolos transmitidos. En la práctica, se suelen tener situaciones intermedias a estos dos casos extremos. En comunicaciones móviles, la ISI suele contener términos correspondientes a 3, 4 ó 5 símbolos aproximadamente. Cuando hay varios símbolos provocando ISI, la degradación sobre la BER se analiza como el efecto provocado por un incremento de potencia total de ruido más que como una reducción de distancia a los umbrales de detección que se explica a continuación.

La degradación que sufre la probabilidad de error debida a la ISI se mide a partir de la reducción de la distancia mínima de los símbolos en recepción respecto a los umbrales de detección. Se presenta el ejemplo 9, que es la continuación del ejemplo 8 y en el que se analiza la expresión obtenida para la probabilidad de error para el caso del canal con eco.

**Ejemplo 9. Degradación de la probabilidad de error producida por la ISI**

Para evaluar esta degradación en el presente ejemplo, se evalúan a continuación las muestras recibidas con los siguientes valores para los caminos representados en el modelo de canal de la expresión (68):

$$C_0 = 1; c_1 = 0,5$$

Sustituyendo en las muestras de la señal detectada de la ecuación (74), se tiene:

$$y(nT) = a[n] + 0,5a[n - 1] + n(kT) \tag{75}$$

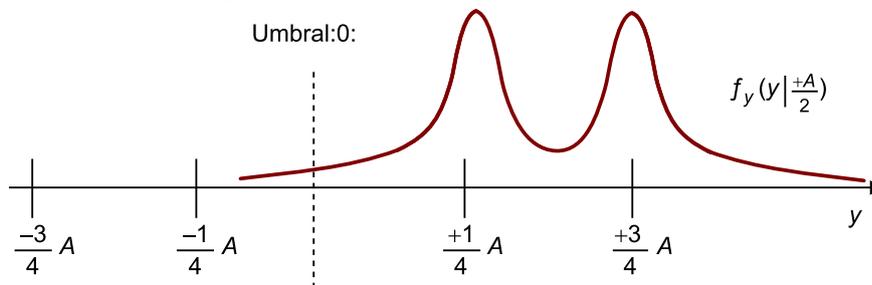
Y la regla de decisión que debe aplicarse es la presentada en la ecuación (34), es decir, el umbral de detección es igual a cero.

Si el símbolo transmitido en el tiempo  $n$  es el de nivel positivo:  $+\frac{A}{2}$  y el transmitido en el tiempo  $n - 1$  es el de nivel negativo:  $-\frac{A}{2}$ , la muestra de señal recibida  $y[n]$  se acerca al umbral de decisión (0), y por tanto se halla menos protegida frente a la muestra del ruido. Dicho de otro modo, si el nivel de ruido llega a ser negativo y menor que  $-\frac{A}{4}$ , esta muestra  $y[n]$  será negativa y por tanto se detectará erróneamente. En resumen, las dos peores situaciones se producen cuando:

$$\begin{aligned} a[n] = +\frac{A}{2}; a[n - 1] = -\frac{A}{2} &\Rightarrow y[n] = +\frac{1}{2}\frac{A}{2} + n[n] \\ a[n] = -\frac{A}{2}; a[n - 1] = +\frac{A}{2} &\Rightarrow y[n] = -\frac{1}{2}\frac{A}{2} + n[n] \end{aligned} \tag{76}$$

En ambas situaciones, la distancia del símbolo detectado, sin considerar la muestra de ruido, respecto al umbral de detección se ha reducido en un 50%. La probabilidad de error o BER se puede aproximar por la probabilidad de que, en estas ocasiones, las muestras de ruido modeladas según la ecuación (36) provoquen el salto de las muestras detectadas respecto al umbral.

Figura 24. Función de densidad de probabilidad de las muestras recibidas condicionada al símbolo transmitido  $+\frac{A}{2}$



En la figura 24 se muestra la función de densidad de probabilidad de las muestras recibidas condicionada al símbolo transmitido  $+\frac{A}{2}$ . La distribución de las muestras es igual a la semisuma de dos gaussianas, pues por probabilidad en el 50% de las ocasiones el símbolo anterior es positivo  $a[n - 1] = +\frac{A}{2}$ , y en el 50% de las ocasiones el símbolo anterior es negativo  $a[n - 1] = -\frac{A}{2}$ .

La probabilidad de detectar un símbolo negativo cuando se ha transmitido un símbolo positivo  $a[n] = +\frac{A}{2}$  es el área de la f.d.p de la figura 24 desde menos infinito hasta el umbral  $y$ , como en el caso sin ISI, se expresa en función del área de la gaussiana  $Q(\cdot)$ :

$$P_b = P_e = \frac{1}{2}Q\left(\frac{A}{4\sigma}\right) + \frac{1}{2}Q\left(\frac{3A}{4\sigma}\right) \approx \frac{1}{2}Q\left(\frac{A}{4\sigma}\right) \tag{77}$$

Los términos no significativos corresponden a áreas de gaussiana  $Q(\cdot)$  de argumentos mayores al representado en la expresión anterior. Debido al carácter decreciente a ritmo exponencial del área de la gaussiana, en general son términos de 2 o 3 órdenes de magnitud menores que el principal, por lo que suelen despreciarse en la evaluación de la

probabilidad de error. La constante  $\frac{1}{2}$  es debida a que el 50% de los símbolos recibidos, salvo ruido, se hallan a la mínima distancia respecto al umbral.

Dadas la energía media de bit  $E_b = \frac{A^2}{4}$  y la potencia de ruido  $\sigma^2 = \frac{N_0}{2}$ , la probabilidad de error en (77) se expresa en función del cociente  $\frac{E_b}{N_0}$  o SNR por bit.

$$P_b = P_e \cong \frac{1}{2} Q\left(\sqrt{\frac{1}{2} \frac{E_b}{N_0}}\right) \quad (78)$$

Al comparar la probabilidad de error en (78) con el resultado obtenido con canal ideal de la ecuación (44), se deduce que, debido a la ISI presente en este ejemplo, para mantener la probabilidad de error respecto al caso ideal debería transmitirse 6dB más de energía media transmitida por bit. Esta cantidad se obtiene al comparar los argumentos de las dos funciones Q(.), fórmulas (44) y (78).

$$6 = 10 \log_{10} \left( \frac{2 \left( \frac{E_b}{N_0} \right)_{\text{caso ideal}}}{\frac{1}{2} \left( \frac{E_b}{N_0} \right)_{\text{caso con ISI}}} \right) \quad (79)$$

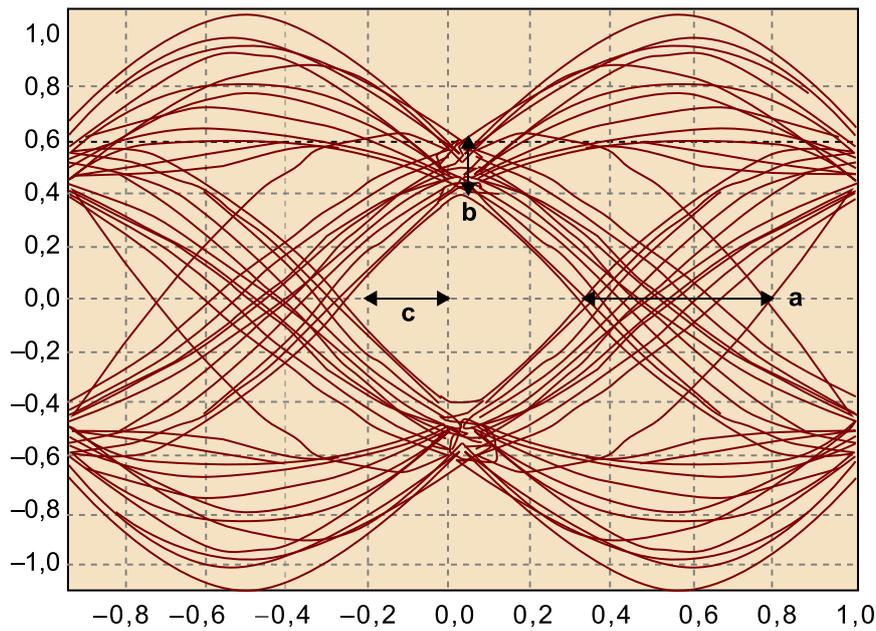
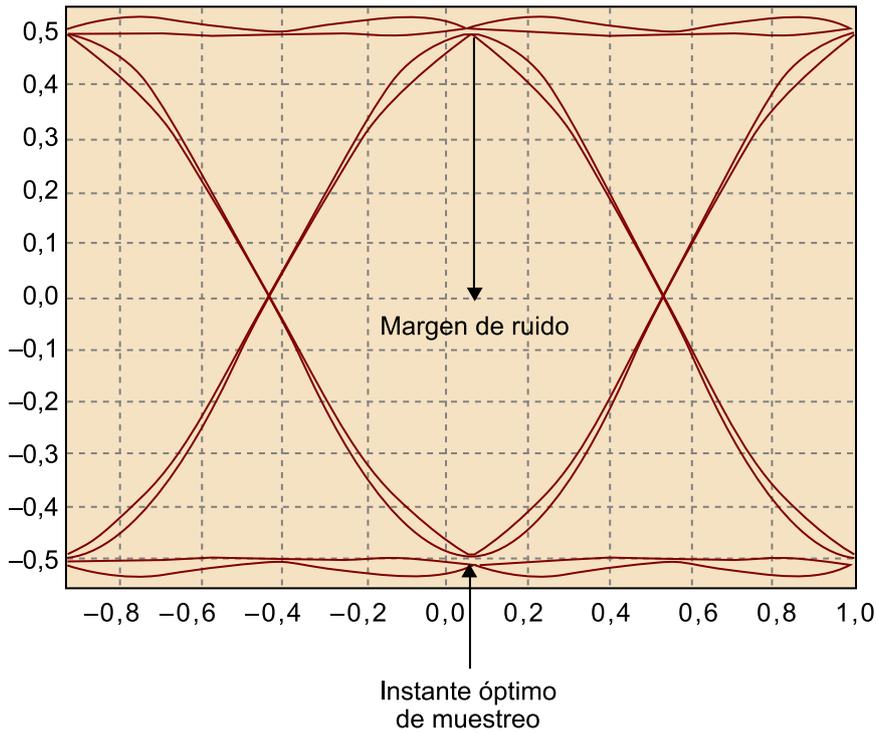
La ISI provoca en detección una degradación de la probabilidad de error respecto a la energía media transmitida por bit. Para evaluar la degradación respecto a la situación sin ISI, deben realizarse los siguientes pasos:

- Analizar la reducción de la distancia de las muestras recibidas respecto al umbral (o umbrales en el caso multinivel).
- Calcular la probabilidad de error a partir de las distancias anteriores.
- Expresar la probabilidad de error en función del cociente  $\frac{E_b}{N_0}$ .

## 6.2. Diagrama de ojo

La cantidad de ISI y el nivel de ruido máximo que puede aceptarse en un sistema de comunicaciones se pueden medir en un osciloscopio mediante el denominado *diagrama de ojo*. Para modulaciones PAM, consiste en representar la señal en uno de los canales del osciloscopio forzando a que el tiempo de barrido horizontal sea igual al tiempo de símbolo o un múltiplo de éste. Para modulaciones PAM binarias, el resultado guarda semejanza con un ojo humano, de ahí el nombre que recibe. Para poder interpretar bien los denominados: margen de ruido, nivel de ISI, instante óptimo de muestreo, distorsión de cruces por cero y sensibilidad al error de muestreo, la visualización debe hacerse, en la medida de lo posible, con la señal libre de ruido.

Figura 25. Diagramas de ojo a la salida del filtro adaptado de modulación 2-PAM polar



En el diagrama de arriba se ha utilizado un pulso RRC 100% *rolloff* libre de ISI. En el diagrama de abajo, se ha utilizado un pulso *sinc* recortado en tiempo, y el canal presenta dos ecos o caminos secundarios.  
 a. Distorsión de cruces por cero  
 b. Nivel de ISI  
 c. Sensibilidad al error de muestreo

En la figura 25 se muestran dos diagramas de ojo. Como puede apreciarse, para el diagrama superior, el margen de ruido ha disminuido respecto al diagrama inferior, por lo que a igual nivel de ruido se producirá un mayor porcentaje de errores. El fenómeno es debido al aumento de ISI. Además, el segundo diagrama es más sensible a pequeños errores de muestreo.

En definitiva, el diagrama de ojo es una medida empírica que puede utilizarse para observar cómo afecta el canal a la señal transmitida y para predecir las prestaciones que potencialmente puede ofrecer la señal recibida a técnicas de sincronismo de bit, es decir, a técnicas orientadas a calcular los instantes de muestreo óptimos para los que los pulsos recibidos presentan su valor máximo.

## Resumen

Este módulo se dedica al estudio de las modulaciones digitales en banda base, particularizando la mayor parte de los desarrollos en las modulaciones de pulsos por amplitud (PAM).

En los primeros apartados del módulo, se prioriza la definición de los principales parámetros que resultan fundamentales en el diseño de una modulación M-PAM. Especialmente se trata de la energía media transmitida por bit y de la velocidad o tasa de bit a la que se transmite la secuencia de bits. Se consideran, en gran parte de los apartados, pulsos de energía igual a uno, lo que facilita el análisis de las prestaciones de todo el sistema en cuanto a probabilidad de error.

El modulador digital se halla formado por el codificador de símbolos y por el conformador de pulsos. El primero de ellos se implementa por software dado que se trata de procesamiento de secuencias discretas, mientras que el segundo en principio se realiza por hardware, ya que a la salida proporciona una señal continua en tiempo.

El filtro adaptado al pulso que soporta una modulación PAM es el elemento *front-end* del sistema demodulador. En condiciones de canal ideal, a la salida del filtro adaptado se tiene una nueva modulación PAM cuyos pulsos coinciden con la función de autocorrelación de los pulsos transmitidos más el ruido generado a la entrada del demodulador. Es deseable que dicha función de autocorrelación cumpla las condiciones de ISI nula. Para que se cumplan estas condiciones cuando el pulso es limitado en banda, se utilizan los pulsos RRC que se hallan parametrizados por el factor de *rolloff*, siendo éste el exceso de ancho de banda de los pulsos RRC respecto al pulso *sinc*.

El pulso *sinc* representa un referente en cuanto a que es el pulso con menor ancho de banda y con condiciones de ISI nula.

La señal a la salida del filtro adaptado es muestreada a razón de una muestra por símbolo. Los instantes de muestreo deben coincidir con los máximos de los pulsos resultantes, es decir, con el instante de máxima apertura del diagrama de ojo.

Tras el filtrado adaptado, en el demodulador se realiza la detección de los símbolos. En condiciones de equiprobabilidad, los umbrales que deben utilizarse son los puntos medios entre cada dos símbolos colindantes. La probabilidad de cometer errores en la detección, al modelar el canal como AWGN, se calcula mediante la función  $Q$ , que es el área de la función gaussiana. Para evaluar el comportamiento de los sistemas es conveniente formular la probabilidad de

### La conformación de los pulsos

En muchos módems digitales la conformación del pulso se realiza antes de la conversión a continua de las señales. Es decir, se realiza la conformación de un pulso discretizado con razón suficiente de muestras por símbolo para que se cumpla el criterio de Nyquist y posteriormente se realiza la conversión D/A.

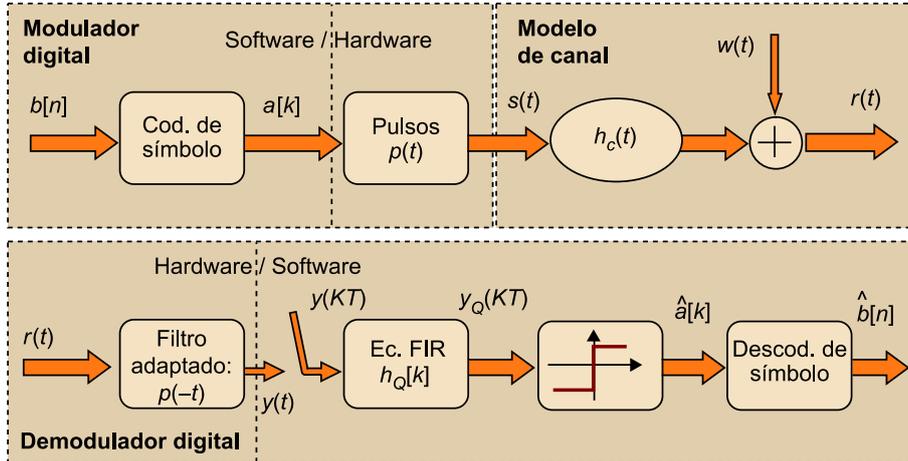
### El filtro adaptado

Al igual que ocurre con la conformación de pulso, en la práctica suele implementarse el filtro adaptado como la convolución discreta con un pulso discretizado. La señal se convierte a discreta (CA/D) previamente y a razón suficiente de muestras por símbolo para que se cumpla el criterio de Nyquist. Las operaciones del proceso resultante son, por tanto: CA/D, Filtro adaptado discreto y diezmado para obtener una muestra por símbolo que se procesa mediante el detector de símbolos.

error en función de la energía media transmitida por bit. En las modulaciones multinivel debe distinguirse entre probabilidad de error de bit (BER) y probabilidad de error de símbolo (SER)

En la figura 27 se muestra un diagrama de bloques funcional con las partes principales de un sistema de comunicaciones digitales en banda base.

Figura 27. Esquema completo de un sistema de comunicaciones digitales en banda base (PAM)





## Ejercicios de autoevaluación

La resolución de los siguientes ejercicios se propone como complemento al estudio del módulo. Se recomienda que se realicen mediante una estrategia sistemática. En general, es conveniente resolver los planteamientos de forma general, trabajando con las variables y parámetros de forma genérica, y sustituir por sus valores numéricos en particular, al final de los apartados. De esta forma, se facilita la propia corrección y seguimiento del ejercicio y se obtiene una visión más amplia que la del caso particular que se esté analizando.

### 1. Cálculo de energía media de bit en 4-PAM polar

Se presenta una secuencia de bits no equiprobables:

$$\begin{aligned}Pr[b[n] = 1] &= 0,3 \\Pr[b[n] = 0] &= 0,7\end{aligned}$$

Se modulan en 4-PAM polar con una separación de niveles de  $A$  volts. Se os pide:

- Hallar la probabilidad de cada uno de los cuatro símbolos de la modulación
- Calcular la energía media de símbolo de la modulación en función del parámetro  $A$ .
- Calcular la energía media de bit de la modulación en función del parámetro  $A$ .

### 2. Cálculo de energía media de bit en 4-PAM unipolar

Se presenta una secuencia de bits no equiprobables:

$$\begin{aligned}Pr[b[n] = 1] &= 0,4 \\Pr[b[n] = 0] &= 0,6\end{aligned}$$

Se modulan en 4-PAM unipolar con una separación de niveles de  $A$  volts. Se os pide:

- Hallar la probabilidad de cada uno de los cuatro símbolos de la modulación.
- Calcular la energía media de símbolo de la modulación en función del parámetro  $A$ .
- Calcular la energía media de bit de la modulación en función del parámetro  $A$ .

### 3. Implementación de código HDB3

En el apartado 1.3 se presenta la modulación bipolar o AMI como un código de línea que se utiliza para ayudar a recuperar el sincronismo de símbolo, en el receptor o decodificador. Si en la trama de bits se generan varios 1 seguidos, las transiciones de la señal ayudan a recuperar el reloj que marca tanto la frecuencia como el inicio de cada uno de los símbolos. Sin embargo, si llegan muchos 0 seguidos, la falta de transiciones sobre la señal puede provocar pérdida de sincronismo. El código HDB3 se utiliza para evitar este problema y consiste en la utilización del pulso rectangular NRZ y la siguiente ley de codificación de símbolos:

- Cada bit 1 se codifica con polaridad invertida al último pulso no nulo transmitido.
- Los bits 0 se codifican con amplitud nula siempre que no excedan a tres bits 0 seguidos.
- A partir del primer bit transmitido se realiza un recuento de polaridad del pasado. Si el número de pulsos positivos coincide con el número de pulsos negativos, la polaridad es nula. Si un grupo de ellos excede al otro en un pulso, la polaridad del pasado es positiva o negativa.
- Cuando llegan 4 bits 0000 seguidos al codificador, el último bit, en lugar de codificarse mediante cuatro amplitudes nulas como en el caso de AMI, se codifica mediante un bit de violación de polaridad, igual polaridad al último pulso transmitido y se denomina  $V$ , pero siempre sin llegar a que la polaridad positiva o negativa exceda en más de un pulso, por lo que cuando sea conveniente también el primero de estos cuatro bits se codifica con polaridad no nula ( $B$ ) pero sin violar la polaridad.

Se resume a continuación en la siguiente tabla:

Tabla 3. Codificación HDB3

Recuento Polaridad	Polaridad último 1	Polaridad cuatro 0000	Nomenclatura
0	+	000+	000V
0	-	000-	000V

Recuento Polaridad	Polaridad último 1	Polaridad cuatro 0000	Nomenclatura
+	+	-00-	B00V
-	-	+00+	B00V

Suponiendo que llega al codificador la siguiente secuencia de bits: 101100000100000000, se pide:

- Dibujad la forma de la señal codificada tanto en AMI como en HDB3.
- Calculad la energía media de bit si la polaridad es de 5 Volt y la velocidad de bit de 1 Mbps.
- Programad una subrutina en el lenguaje de programación que deseéis que realice la codificación HDB3. La señal de entrada debe ser la secuencia de bits y la señal de salida la secuencia de amplitudes 0, +1 ó -1. Verificad el correcto funcionamiento tanto con la secuencia ejemplo como con otras secuencias que generéis.

#### 4. Transmisión binaria sobre cable telefónico

Se desea transmitir una modulación binaria sobre un cable telefónico que atenúa la señal 0,01 dB por cada metro de cable. Se trata de seleccionar la modulación binaria polar o la modulación binaria unipolar. El transmisor proporciona un cociente de energías  $\left(\frac{E_b}{N_0}\right)_{dB} = 10$  dB. Calculad para un tendido de 10 m de cable la BER que se obtendrá con cada uno de los dos sistemas de modulación.

#### 5. Ancho de banda en modulaciones PPM

La modulación PPM consiste en una modulación de pulsos por posición. Es comúnmente usada en muchos tipos de comunicaciones ópticas. Para el caso binario, cuando el bit es igual a cero, la señal que se transmite corresponde a un pulso rectangular de duración igual a la mitad del símbolo y centrado en la primera mitad del periodo de símbolo y, cuando el bit es igual a 1, el pulso también de duración mitad ocupa la segunda mitad del periodo de símbolo. La señal modulada resultante se expresa a continuación:

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A\Pi\left(\frac{t-a\frac{T}{2}-kT}{\frac{T}{2}}\right) \quad (80)$$

Donde  $a = 0,1$  en función del bit que se esté transmitiendo. La modulación se generaliza al caso de  $M$  niveles. Si  $M = 2b$ , con  $b$  el número de bits por símbolo, se seleccionan  $M$  posiciones diferentes de pulsos de duración  $\frac{T}{M}$ , dentro del periodo asignado a la duración de cada símbolo. La expresión de la señal modulada queda para el caso general y con  $a=0,1,\dots,M-1$ :

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A\Pi\left(\frac{t-a\frac{T}{M}-kT}{\frac{T}{M}}\right) \quad (81)$$

Se pide evaluar el ancho de banda resultante (únicamente el ancho del lóbulo principal entre ceros) para la modulación cuando se desean transmitir bits a la velocidad de 1 Gbit/seg y en cada una de las dos situaciones siguientes.

- Modulación 2 PPM
- Modulación 16 OPPM

Para el caso 2 PPM, dibujad la forma temporal de onda obtenida al transmitir la secuencia de bits:10110100.

#### 6. Ancho de banda sin distorsión y pulsos RRC

Se desea realizar una transmisión PAM para enviar una secuencia de bits a una velocidad de 5 Mbps. Se proponen dos estrategias diferentes: Modulación 4-PAM polar y modulación 8-PAM polar. En ambos casos se utiliza un pulso RRC de 35% de factor de *rolloff*. Se os pide:

a) Calcular qué ancho de banda sin distorsión debe presentar el canal para cada uno de los dos tipos de modulación.

b) Calcular el cociente de energías  $\frac{E_b}{N_0}$  necesario en cada caso para obtener una probabilidad de error de bit (BER) del orden de 0,01.

### 7. Modulación 2-PAM a través de canal con ISI

Suponed una modulación 2-PAM polar de pulsos *sync* de energía unidad. Se transmite por un canal cuya respuesta impulsional se puede modelar como una transmisión multicamino:

$$h_c(t) = \alpha\delta(t) - 0,25\alpha\delta(t - T) + 0,25\alpha\delta(t - 2T)$$

y en el que el ruido es AWGN y el receptor consiste en el filtro adaptado al pulso transmitido, CA/D y detector de símbolos.

a) Evaluad la probabilidad de error aproximando la misma por el peor caso de ISI que se puede dar en el sistema.

b) Si el cociente  $\frac{E_b}{N_0} = 10$  y  $\alpha = 1$ , evaluad la probabilidad de error obtenida.

c) Comparad la probabilidad obtenida en el apartado anterior con la que se obtendría con un sistema de canal ideal.

### 8. Modulación 2-PAM detectada con errores en el umbral

Suponed una modulación 2-PAM polar de pulsos NRZ de energía unidad. Se transmite por un canal ideal y en el que el ruido es AWGN. Por error, el umbral de detección tras el filtro adaptado al pulso, y el CA/D, se sitúa a  $0,05\frac{A}{2}$ , siendo  $\frac{A}{2}$  el nivel de tensión de los símbolos binarios.

a) Evaluad la probabilidad de error aproximando la misma por el peor caso de ISI que se puede dar en el sistema.

b) Evaluad la degradación en dB de energía media transmitida por bit respecto al caso de umbral correcto e igual a cero.

### 9. Ecuación de una modulación 2-PAM Unipolar

Considerad el esquema dado en la figura 27 para un sistema de comunicaciones digitales en banda base. Suponed una modulación 2-PAM unipolar de pulsos NRZ de energía unidad. Se transmite por un canal no ideal y en el que el ruido es AWGN. La respuesta impulsional del canal es igual a:

$$h_c(t) = -0,1\delta(t) + \delta(t - T) - 0,1\delta(t - 2T)$$

a) Calculad y dibujad el pulso equivalente resultante a la salida del filtro adaptado.

b) Medid el nivel de ISI según el criterio de distorsión de pico resultante a la salida del filtro adaptado.

c) Diseñad un ecualizador transversal FIR de tres coeficientes aplicando el criterio de forzador de ceros.

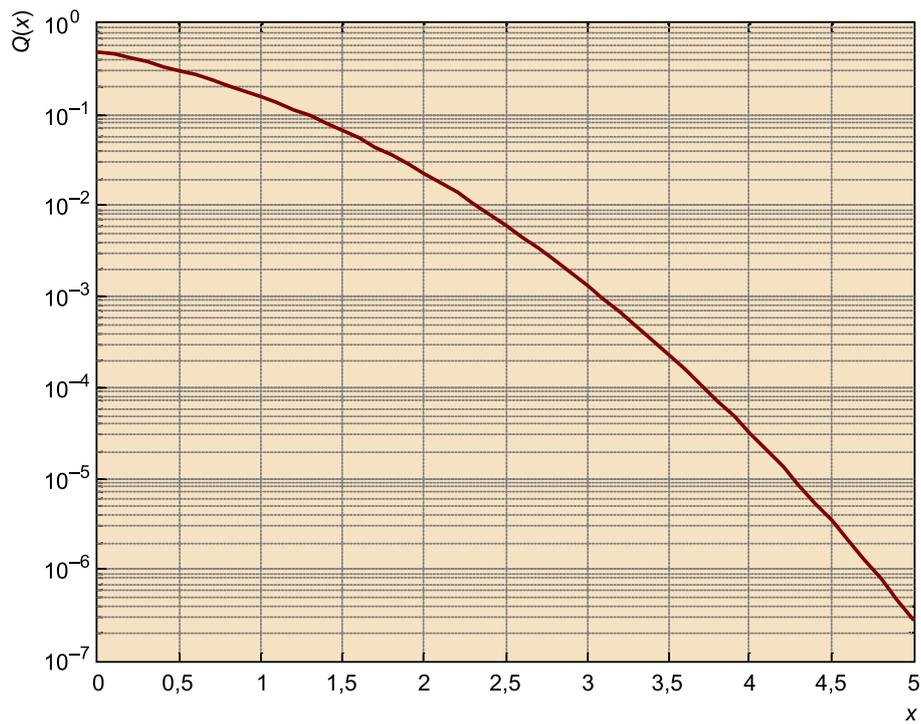
d) Evaluad las mejoras obtenidas mediante el ecualizador para la ISI y para la potencia de ruido.

e) Si  $\frac{E_b}{N_0} = 10$ , obtened aproximadamente la probabilidad de error obtenida con y sin ecualizar. Comparad ambas magnitudes.

## Fórmulas matemáticas

### Área de la gaussiana

La siguiente figura muestra los valores de  $Q(x) = \int_x^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\lambda^2}{2}} d\lambda$  para  $0 \leq x \leq +5$



## Bibliografía

**Benedetto S.; Biglieri, E.** (1999). *Principles of Digital Transmission*. Kluwer Academic Press / Plenum publishers.

**Carlson, A. B.** (2001). *Communication Systems: An Introduction to Signals and Noise in Electrical Communication* (4a. ed.). McGraw-Hill.

**Peebles, P. Z.** (2006). *Principios de probabilidad, variables aleatorias y señales aleatorias*. McGraw-Hill.

**Proakis, J. G.** (2003). *Digital communications* (4a. ed.). McGraw-Hill.

**Proakis, J. G.; Salehi, M.** (2002). *Communication Systems Engineering* (2a. ed.). Prentice Hall.[www.etsi.org/](http://www.etsi.org/)

